

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Β' Λυκείου**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ****Θέμα 2ο**

15011. Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$1. y = 15 - x$$

$$2. y - x = 15$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

$$3. 50y - 20x = 480$$

$$4. 20x + 50y = 480$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

Λύση

α) i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

$$\begin{aligned} \beta) \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 750 - 50x = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = -270 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - 9 = 6 \\ x = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50 €.

$$\mathbf{15016.} \text{ Δίνεται το γραμμικό σύστημα } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}.$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

Λύση

α) Το σημείο $(0,4)$ είναι λύση του συστήματος, αν και μόνο αν: $\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 \\ 2 \cdot 0 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ -4 = 3 \text{ αδύνατο} \end{cases}$.

Άρα δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

$$\beta) \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(2x - 3) = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4x - 6 = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases} \cdot \text{Λύση του συστήματος είναι το } (x, y) = (2, 1).$$

γ) Το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έχει συντεταγμένες που αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, άρα το σημείο τομής τους είναι το $(2, 1)$.

15849. Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά.

Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$\begin{array}{ll} \text{Α.} \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} & \text{Β.} \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases} \\ \text{Γ.} \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} & \text{Δ.} \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases} \end{array}$$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

Λύση

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1). Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2).

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ.

$$\beta) \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6(x + 5) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6x + 30 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 18x = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 + 5 = 20 \\ x = 15 \end{cases}$$

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

18431. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Για } k = 2 \text{ είναι } \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 22 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 22 = 8 \text{ αδύνατο.}$$

$$\beta) \text{ Για } k = 1 \text{ είναι } \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - y = -8 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 3x + y = 11 \\ -3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } -3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 14$$

21227.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

Λύση

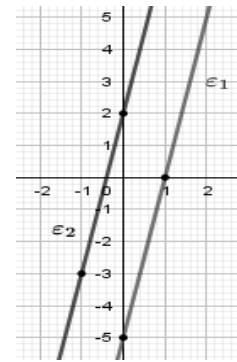
$$\alpha) \begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 0 = 7 \text{ αδύνατο.}$$

β) Για την ευθεία (ε_1): $5x - y = 5$ έχουμε:

x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία (ε_2): $-5x + y = 2$ έχουμε:

x	0	-1
y	2	-3



Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο

31570. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M.

Λύση

α) Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \quad (1) \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 12 \quad (+) \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2 \text{ και από την (1): } 4 + y = 6 \Leftrightarrow y = 2, \text{ άρα } M(2,2).$$

β) Η $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M όταν $3 \cdot 2 + 2 = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8$ ισχύει

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

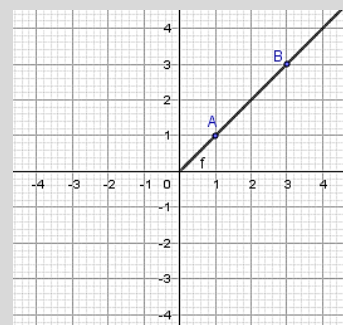
14971. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.

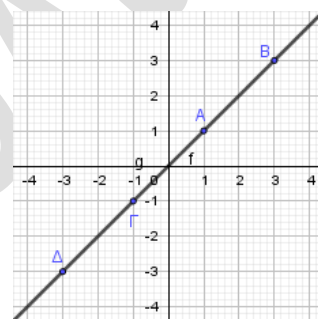


Λύση

α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού $f(1) = 1 \neq 3 = f(3)$

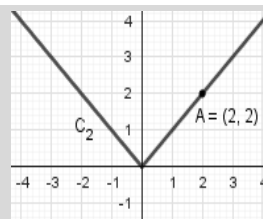
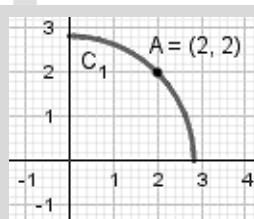
Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $1 < 3$ και $f(1) < f(3)$.

β) Επειδή η f είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Επειδή διέρχεται από τα A, B θα διέρχεται και από τα σημεία $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(-3,-3)$ που είναι τα συμμετρικά των A, B αντίστοιχα ως προς την αρχή O των αξόνων.

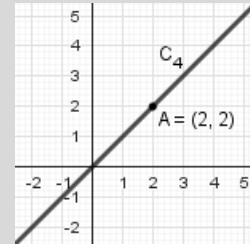
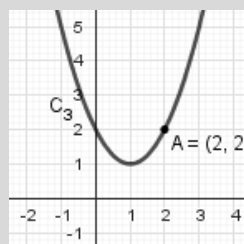


14976. Δίνονται τα διπλανά σχήματα:

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.



β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.



Λύση

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y' .

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα y' , ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Επειδή η C_2 είναι η άρτια ισχύει ότι $f(-2) = f(2) \Leftrightarrow k = 2$.

Επειδή η C_4 είναι η περιττή ισχύει ότι $f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow k = -2$.

15019. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

α) Αν η f ήταν άρτια τότε θα ήταν $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

β) Αν η f ήταν περιττή τότε θα ήταν $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

γ) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε θα ήταν $f(-1) < f(1) \Leftrightarrow 2 < 0$ που είναι άτοπο.

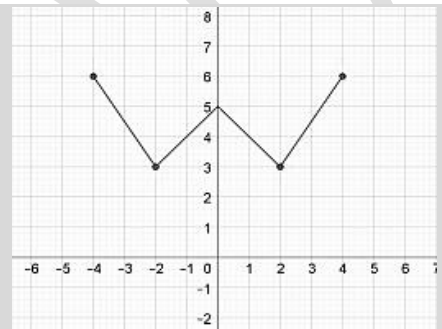
15024. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το

$[-4, 4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και στο $[2, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4, -2]$ και στο $[0, 2]$.

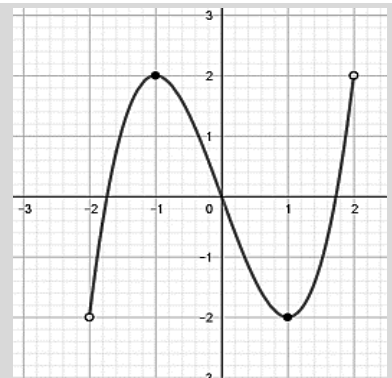
γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

15112. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.



Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-2, -1]$ και $[1, 2)$.

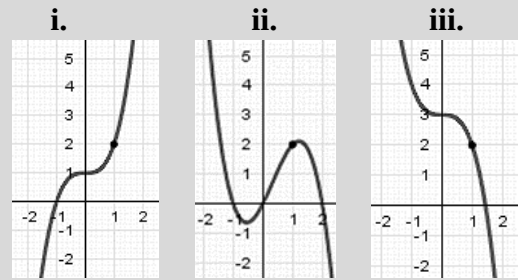
γ) Η f έχει μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = 2$ και ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = -2$.

15114. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις διπλανές γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

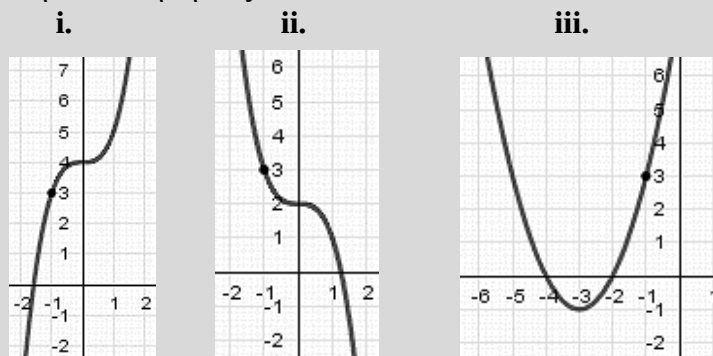
α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,2)$ και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1 < 2 \Leftrightarrow f(1) < f(2)$ αφού $f(1) = 2$ και $f(2) = 9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η **i.** διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(1,2)$, η **i.** είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

15115. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1 < 2 \Leftrightarrow f(-1) > f(2) \Leftrightarrow 3 > 5$ που είναι άτοπο.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η **ii.** διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(-1,3)$, η **ii.** είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

15116. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.

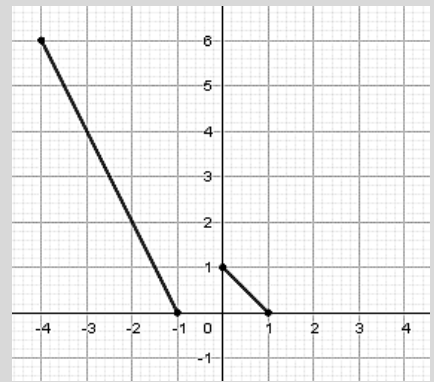
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

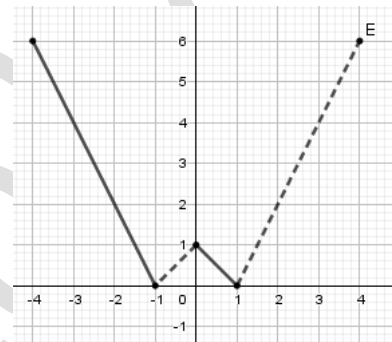


Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον y' y άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.

β) i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4, -1]$ και $[0, 1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y .

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -4 και 4 .



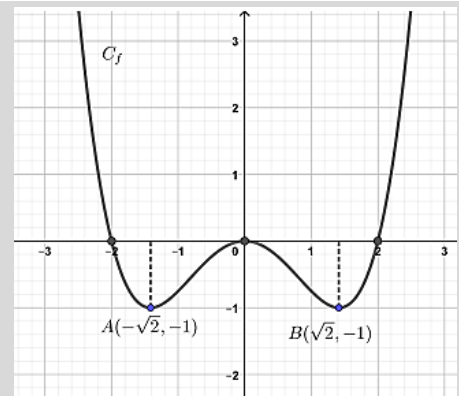
15349. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y' y , που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y' y . Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[0, \sqrt{2}]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0]$ και $[\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 2$

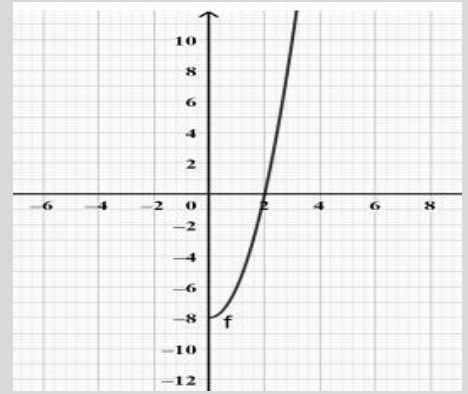
15372. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

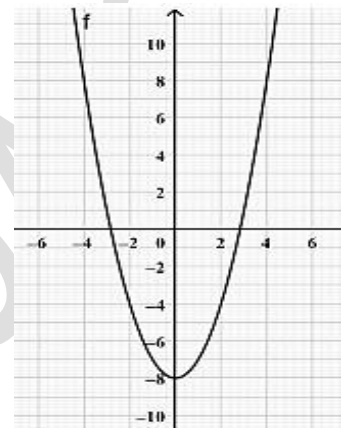
β) Να βρείτε:

- Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



β) i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για $x=0$.

15437. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

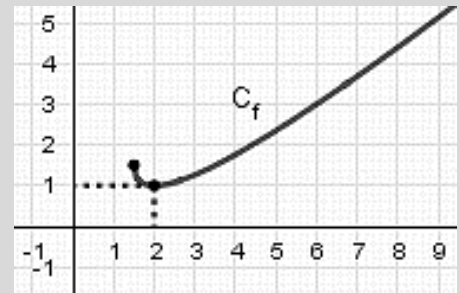
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

i. γνησίως φθίνουσα

ii. γνησίως αύξουσα



Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$, άρα $A_f = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι: Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν $x = 2$.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

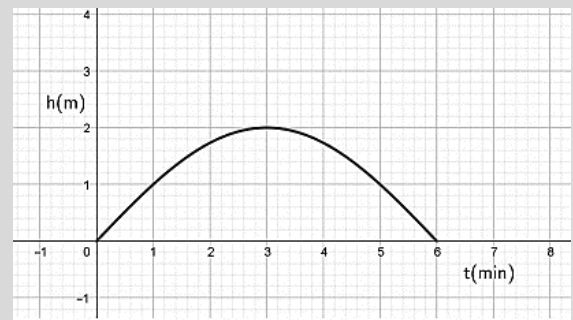
15645. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα.

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.



Λύση

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος 1m όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1, δηλαδή τις χρονικές στιγμές 1min και 5min.

β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι 2m. Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 3\text{min}$.

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα $[0,6]$.

15787. Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

α) Να βρείτε:

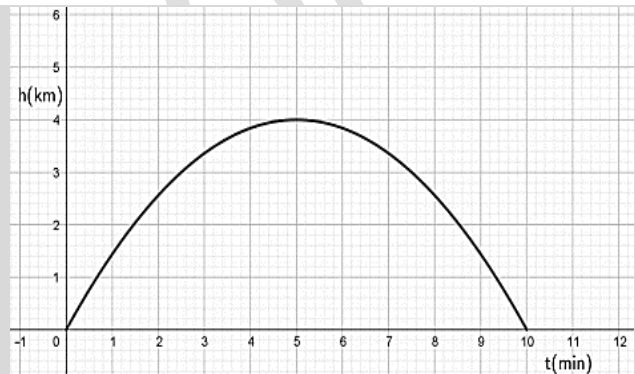
i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km.

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.

ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

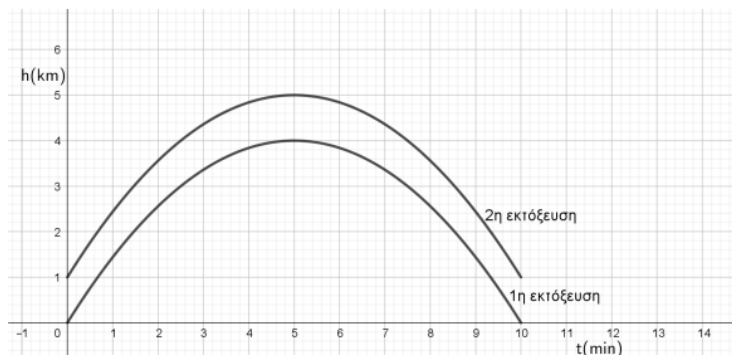


Λύση

α) i) Από το σχήμα βλέπουμε πως ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι 10 min.

ii) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η συνάρτηση του ύψους παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5\text{min}$ το $h(5) = 4\text{km}$.

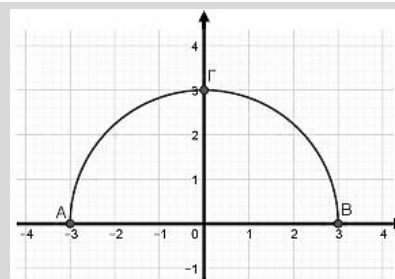
β) i) Η νέα συνάρτηση είναι η $g(t) = h(t) + 1$ άρα η γραφική της παράσταση είναι κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω της h .



ii) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5 \text{ min}$ το $g(5) = 5 \text{ km}$.

16129. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

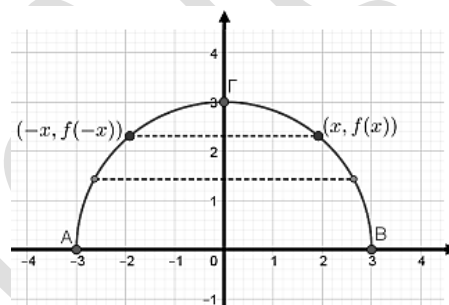
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3 . Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3, 3]$.

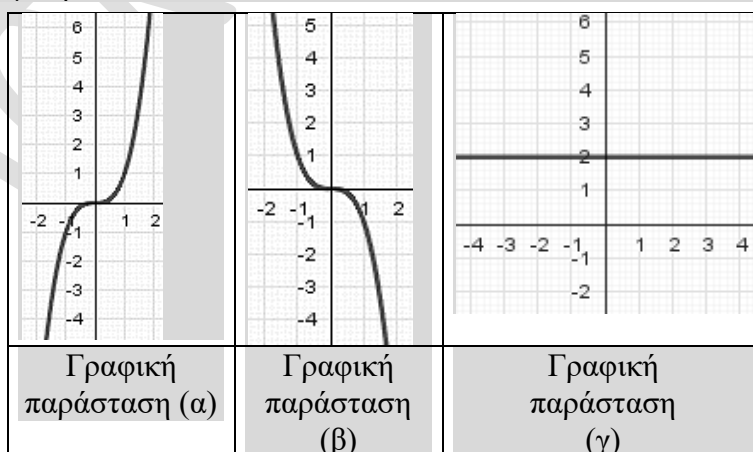
β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.



γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.

21164. Δίνεται το σημείο $A(-2, 8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
 β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
 γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Λύση

α) Η f είναι περιττή οπότε στη γραφική της παράσταση ανήκει το σημείο με συντεταγμένες $B(2, -8)$, το οποίο είναι το συμμετρικό του A ως προς την αρχή των αξόνων.

β) Είναι $x_A = -2 < x_B = 2$, $y_A = 8 > y_B = -8$ και η f είναι γνησίως μονότονη οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 4ο

15022. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

β. $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

δ. $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-1) = f(1)$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1) < f(2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$ και $1 < 2$, είναι $f(1) < f(2)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$, για κάθε $0 \leq x \leq 3$ είναι

$$f(0) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow f(3) \geq f(x) \geq f(0) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3, 0]$, για κάθε $-3 \leq x \leq 0$ είναι $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$ (2).

Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-3) = f(3)$, οπότε η (2) γίνεται: $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

γ) Επειδή $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0)$.

Επειδή $f(x) \leq f(3)$ και $f(x) \leq f(-3)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x = 3$ και $x = -3$ το $f(-3) = f(3)$.

δ) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[-3, 3]$, ο τύπος της θα είναι ο α ή ο β.

Στην α είναι $f(0) = 3$ και $f(3) = 0$, δηλαδή $f(0) > f(3)$ που είναι άτοπο. Άρα ο β είναι ο τύπος της f .

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

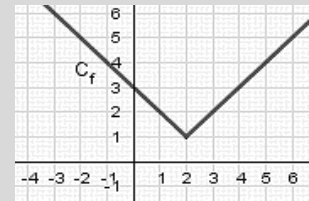
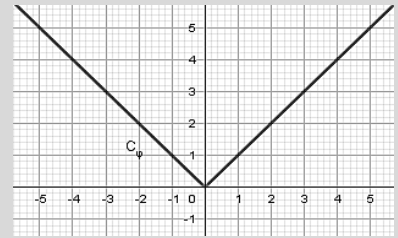
Θέμα 2ο

14972. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2|+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:

- Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.
- Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

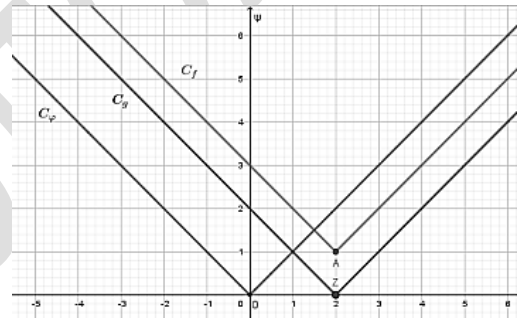


Λύση

14972.α) Οι γραφικές παραστάσεις των και προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της :

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).

Έτσι προκύπτουν οι διπλανές γραφικές παραστάσεις



β) i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = 1$.

14983. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική

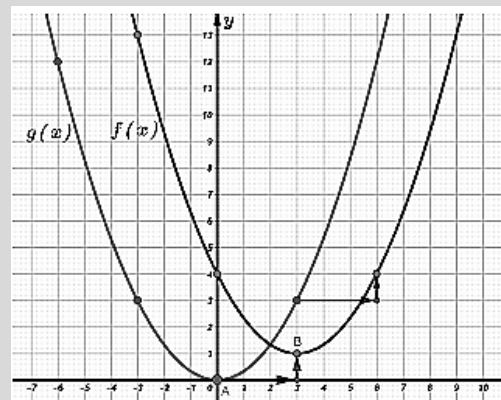
παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| (i) $f(x) = g(x+3)+1$ | (ii) $f(x) = g(x+3)-1$ |
| (iii) $f(x) = g(x-3)+1$ | (iv) $f(x) = g(x-3)-1$ |

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



Λύση

α) Σωστή απάντηση είναι η (iii).

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο αριθμός 1 και

επιτυγχάνεται όταν $x = 3$.

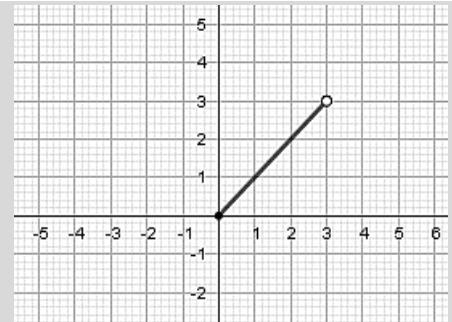
γ) Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

15017. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$.



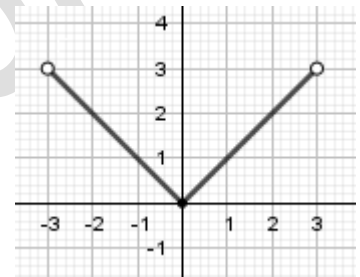
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 3)$ και $-x \in (\alpha, 3)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha = -3$.

β) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$, είναι $f(2) = 2$. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-2) = f(2) = 2$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

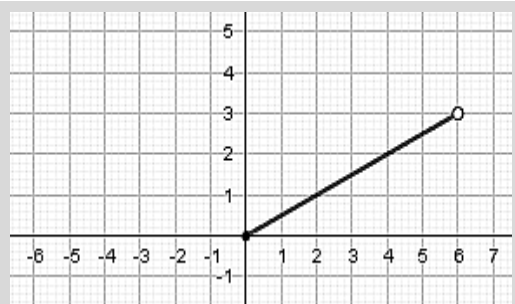


15018. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

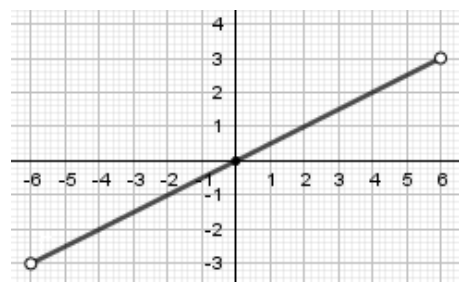
Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 6)$ και $-x \in (\alpha, 6)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha = -6$.

β) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$, είναι $f(4) = 2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-4) = -f(4) = -2$.

γ) Επειδή η f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



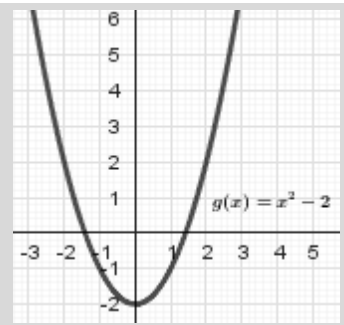
15811. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

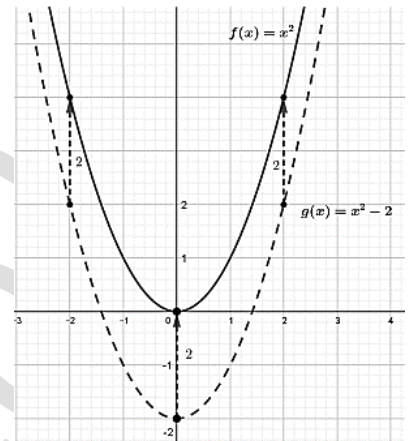


Λύση

α) i. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον y άξονα, άρα η g είναι άρτια.

ii. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 0$, το $g(0) = -2$, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x) \geq -2$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 = g(x) + 2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες.



20671. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση;

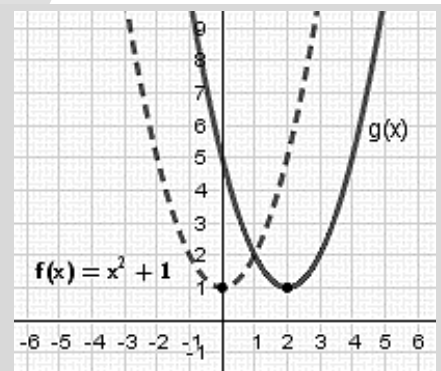
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .



Λύση

α) i. Η f είναι άρτια γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον y άξονα.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με 1 για $x = 0$, αφού, όπως φαίνεται στο σχήμα, $f(0) = 1$ και $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) i. Η γραφική παράσταση της g προέκυψε με οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες δεξιά.

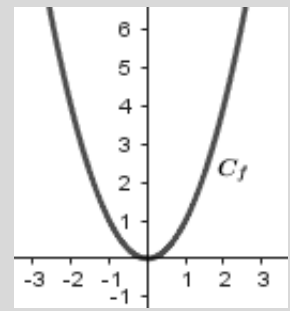
ii. Σύμφωνα με το βι), ο τύπος της g είναι $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

21673. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.

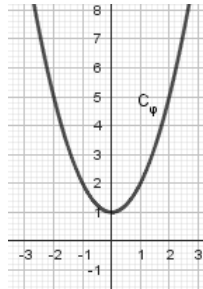
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.



Λύση

α) $\varphi(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.



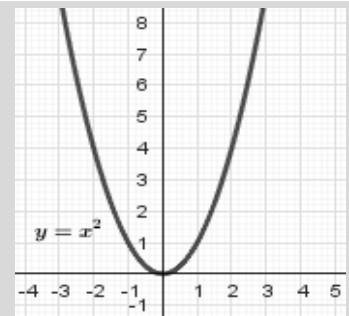
β)

γ) Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Έχει ελάχιστο το 1 για $x = 0$.

32674. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

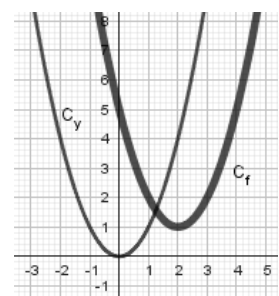
β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.



Λύση

α) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$.

β) Η y θα μετατοπιστεί οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.



Θέμα 4ο

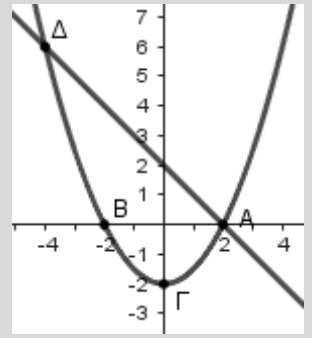
14294. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.

α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις

συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**Λύση**

α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το Γ τότε $f(0) = -2 \Leftrightarrow \gamma = -2$

Άρα $f(x) = ax^2 + bx - 2$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία B, Γ είναι $f(-2) = f(2) = 0$ άρα οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Από τους τύπους Vieta είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -2 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και

$P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{-2}{\alpha} \Leftrightarrow (-2) \cdot 2 = \frac{-2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

Άρα $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -2x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4$

Είναι $g(-4) = 4 + 2 = 6$ και $g(2) = 0$ άρα τα κοινά σημεία είναι $\Delta(-4, 6)$ και $A(2, 0)$.

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω τότε θα έχουμε την συνάρτηση

$h(x) = f(x) + 4,5 = \frac{1}{2}x^2 - 2 + 4,5 = \frac{1}{2}x^2 + 2,5$

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $h(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2,5 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 5 = -2x + 4 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

14973. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8, x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5, x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να βρείτε:

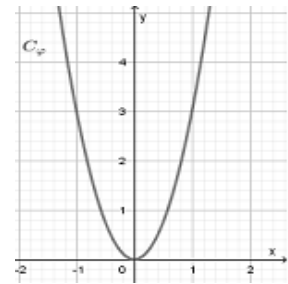
i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Λύση

α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$, επομένως είναι
άρτια συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι η διπλανή παραβολή.

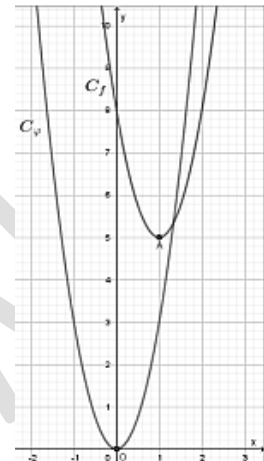


β) Είναι: $f(x) = 3(x-1)^2 + 5 = 3(x^2 - 2x + 1) + 5 \Leftrightarrow$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 3 + 5 = 3x^2 - 6x + 8$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = 3(x-1)^2 + 5.$$

Η γραφική παράσταση της προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω.



γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$.

i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.

ii. Η συνάρτηση παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$

iii. Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες

Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα και αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

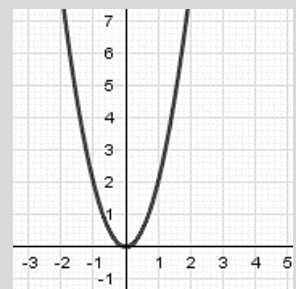
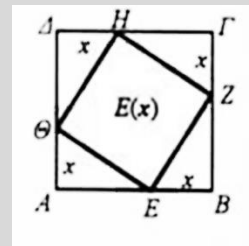
20713. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα, ώστε $EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο $EZH\Theta$.

α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2(x-1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνεται ελάχιστο.

δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία E, Z, H, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο EBZ είναι

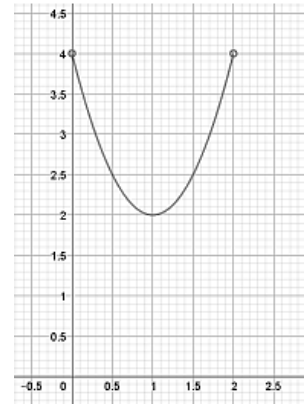
$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 = x^2 + (2-x)^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}.$$

Είναι $EB = x > 0$ και $BZ = 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, άρα $x \in (0, 2)$.

$$\text{β)} (EZH\Theta) = E(x) = EZ^2 = 2(x^2 - 2x + 2) = 2[(x-1)^2 + 1] = 2(x-1)^2 + 2$$

γ) Η γραφική παράσταση της E προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της C_g κατά 1 μονάδα δεξιά και 2 προς τα πάνω.

δ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το εμβαδόν E γίνεται ελάχιστο για $x = 1$, τότε $EB=BZ=1$, οπότε το $EZH\Theta$ είναι τετράγωνο. Τότε τα σημεία E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου



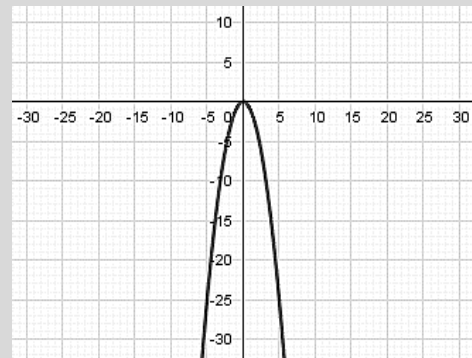
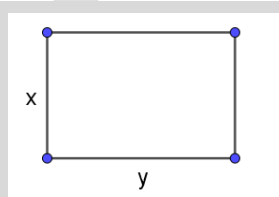
20715. Με συρματοπλέγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 20m δηλαδή $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 10)$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

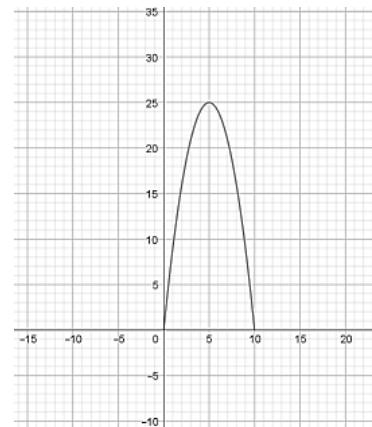
$$\text{Άρα } E(x) = -x^2 + 10x = -x^2 + 10x - 25 + 25 = -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -(x - 5)^2 + 25, 0 < x < 10$$

γ) Η γραφική παράσταση της E προκύπτει αν μετατοπίσουμε την g κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά και 25 μονάδες προς τα πάνω.

Η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=5$ το $E(5) = 25$

Άρα το μέγιστο εμβαδόν το έχουμε όταν $x=5$.

δ) Για $x=5$ είναι και $y=5$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο πλευράς 5.



32677. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

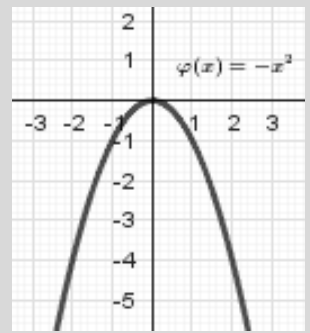
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

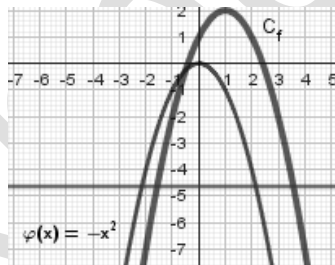
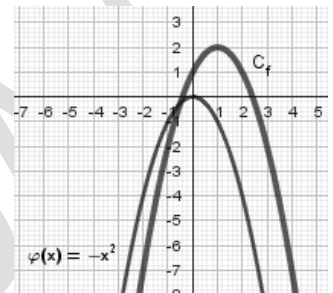
α) $f(x) = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x - 1 + 2 \Leftrightarrow$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

β) i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Η f έχει μέγιστο το 2 για $x = 1$.

iii. Κάθε οριζόντια ευθεία $y = \kappa$, $\kappa < 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία, επομένως η εξίσωση $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Θέμα 2ο

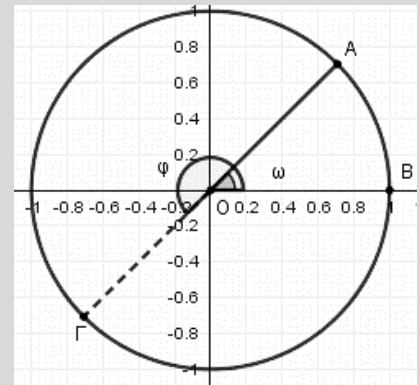
15079. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \text{B}\hat{\text{O}}\text{A}$.

α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\text{syn}\omega = \frac{3}{5}$.

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\varphi} = \text{B}\hat{\text{O}}\hat{\Gamma}$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\text{syn}\varphi$.



Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου Α είναι $0,6 = \frac{3}{5}$, έχουμε $\text{syn}\omega = \frac{3}{5}$.

β) i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $\text{AO}\hat{\Gamma} = \pi \text{ rad}$. Επομένως $\varphi = \text{BO}\hat{\Gamma} = \pi + \omega$.

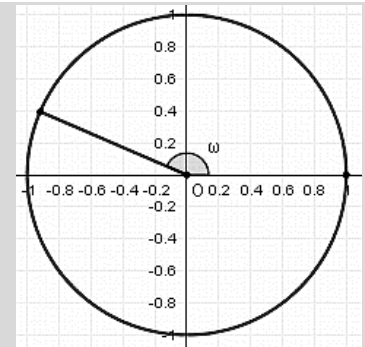
ii. Το συνημίτονο της γωνίας φ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\text{syn}\varphi = -\frac{3}{5}$.

15191. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0,4$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

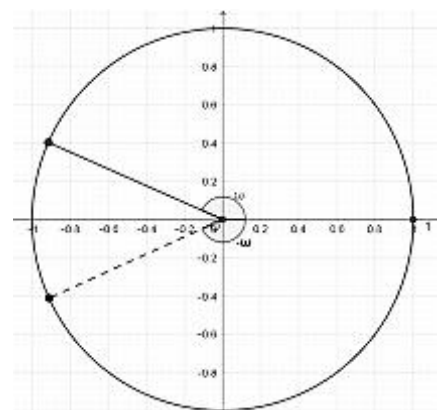


Λύση

15191.α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x.

Άρα η γωνία $-\hat{\omega}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.

β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega) = -0,4$



18868. α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi 500^\circ = \varepsilon\phi 140^\circ$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\phi 500^\circ$.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\phi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$.

Λύση

α) $\varepsilon\phi 500^\circ = \varepsilon\phi(360^\circ + 140^\circ) = \varepsilon\phi 140^\circ$

β) i) Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\phi 500^\circ$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $\varepsilon\phi 140^\circ$

Είναι $90^\circ < 140^\circ < 180^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 140° βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο άρα είναι $\varepsilon\phi 140^\circ < 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi 500^\circ < 0$

ii) Είναι $180^\circ < 250^\circ < 270^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 250° βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο επομένως $\eta\mu 250^\circ < 0$.

Είναι $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 300° βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα είναι $\sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$.

Επομένως αφού $\varepsilon\phi 500^\circ < 0$ και $\eta\mu 250^\circ < 0$ τότε $\varepsilon\phi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ > 0$ και $\sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$ άρα $A > 0$.

21161. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ .

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB, επίκεντρη γωνία ω .

β) Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

Λύση

α) Ένα ακτίνιο είναι το τόξο ενός κύκλου ακτίνας ρ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου ρ .

Εφόσον το μήκος του τόξου AB είναι ίσο με δύο ακτίνες του κύκλου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θα είναι ίση με 2 ακτίνια.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω που είναι 2 ακτίνια θα αντιστοιχεί $\frac{360}{\pi}$ μοίρες.

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Θέμα 2ο

15046. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

Λύση

α) Επειδή η γωνία A βρίσκεται σε τρίγωνο είναι $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$. Επειδή $\sin A < 0$ είναι $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

β) Είναι $\eta\mu^2 A + \sin^2 A = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 A + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu A = \pm \frac{4}{5}$.

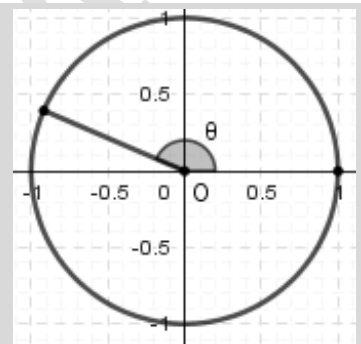
Επειδή $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, είναι $\eta\mu A > 0$, άρα $\eta\mu A = \frac{4}{5}$.

15060. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την OA και τελική την OM .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ .

γ) Να βρείτε τη γωνία θ .



Λύση

α) Το σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y) όπου $x = \sin\theta$ και $y = \eta\mu\theta$. Άρα $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$.

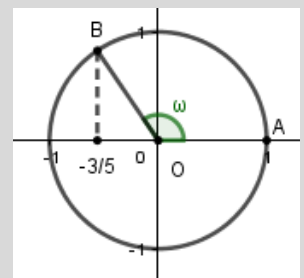
β) $\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, οπότε $\sin\theta > 0$, άρα $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ) Επειδή $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και η θ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, είναι $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν $\sin\omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.



Λύση

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι όσο και η τετμημένη του σημείου B του τριγωνομετρικού κύκλου.

Άρα $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \omega = \pm \frac{4}{5}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, οπότε $\eta\mu \omega > 0$, άρα $\eta\mu \omega = \frac{4}{5}$.

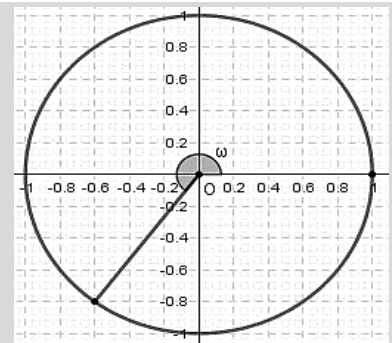
15192. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu \omega$.

ii. $\epsilon\phi \omega$



Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι ή τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sin \omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β) i. $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \omega = \pm \frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu \omega < 0$, άρα $\eta\mu \omega = -\frac{4}{5}$.

ii. $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sin \omega} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

15814. Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm.

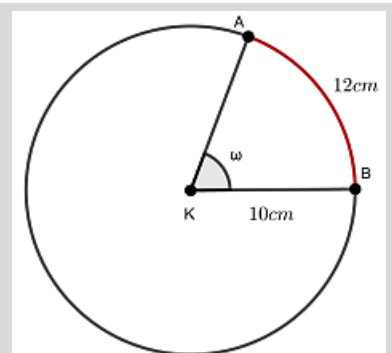
Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad.

ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

β) Αν $\sin \omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$)



Λύση

α) i) Το ακίνιο (rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ , βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ . Εδώ έχουμε επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας 10 cm γωνία ω , η οποία βαίνει σε τόξο 12 cm. Άρα αφού το 1 rad σε αυτόν τον κύκλο είναι γωνία που βαίνει σε τόξο 10 cm τότε η γωνία

$$\omega = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ rad}.$$

ii) Είναι $1,2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,4 < \pi$ ισχύει, άρα $\omega < \frac{\pi}{2}$ rad και είναι οξεία.

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Ισχύει } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega &= 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{544}{625} \Leftrightarrow \\ \eta\mu\omega &= \pm \frac{\sqrt{544}}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{4\sqrt{34}}{25} \text{ και επειδή η γωνία } \omega \text{ είναι οξεία τότε } \eta\mu\omega = \frac{4\sqrt{34}}{25}. \end{aligned}$$

16000.α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

$$\text{Είναι } \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

$$\beta) \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι $\eta\mu\theta < 0$, άρα $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20817. Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\phi\omega}$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{3}{5}.$$

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ είναι $\eta\mu\omega < 0$, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

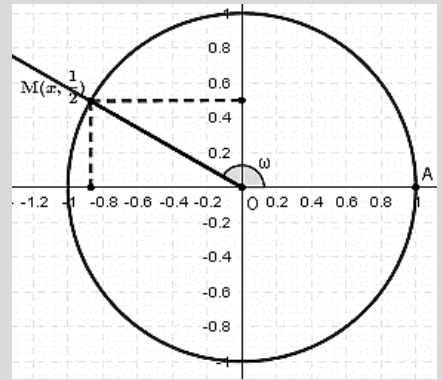
$$\beta) \text{ Είναι } \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \text{ και } A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\phi\omega} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{4}} = -\frac{4}{5}$$

20824. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία

$$\widehat{AOx} = \omega, \quad \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \quad \text{και το σημείο } M\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Λύση

α) Επειδή το σημείο M βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο και σχηματίζει γωνία ω με τον ημιάξονα Ox , έχει συντεταγμένες του σημείου $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

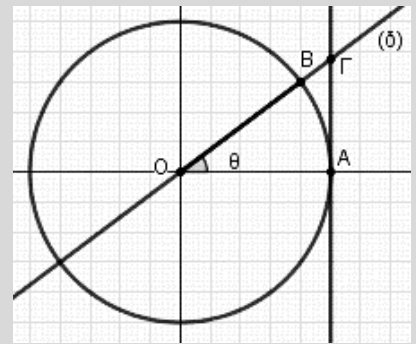
Θέμα 2ο

15092. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $\widehat{ΑΟΒ} = \theta$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.



Λύση

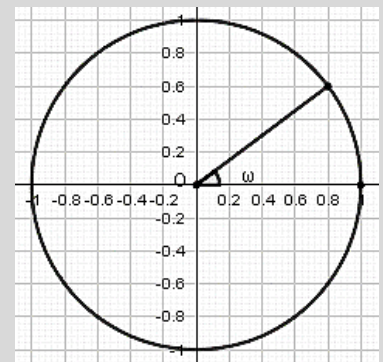
α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\sin\theta = 0,8 = \frac{4}{5}$. Είναι $\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

β) Γνωρίζουμε ότι είναι $B(\sin\theta, \eta\mu\theta)$ και $\Gamma(1, \epsilon\phi\theta)$. Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Gamma\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

15193. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin\omega = 0,8$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

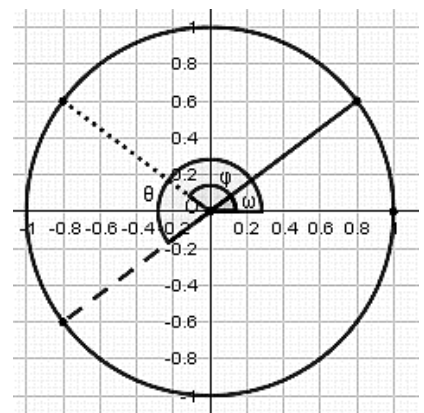


Λύση

α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0,8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, ή οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0,8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες ϕ και θ είναι όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.

β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\phi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π , οπότε $\theta = \pi + \omega$.

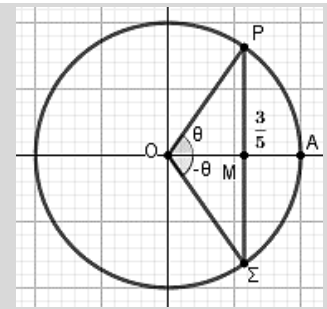


15266. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = \frac{3}{5}$

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.



Λύση

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η OP και το σημείο P έχει τετμημένη $x = \frac{3}{5}$, άρα $\sin \theta = \frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{4}{5}$.

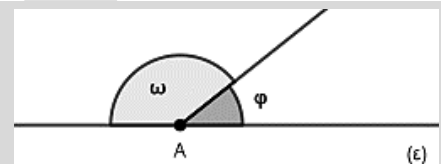
Επειδή η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu\theta > 0$, άρα $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$.

γ) $\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin(-\theta) = \sin\theta = \frac{3}{5}$.

15652. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.



Λύση

α) Είναι $\eta\mu^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \sin^2\varphi = 1 - \eta\mu^2\varphi$.

Αντικαθιστούμε το $\eta\mu\varphi$ με $\frac{3}{5}$ και έχουμε $\sin^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$

Επειδή φ οξεία γωνία είναι $\sin\varphi > 0$, οπότε έχουμε $\sin\varphi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\omega = \pi - \varphi$.

Άρα: $\eta\mu\omega = \eta\mu(\pi - \varphi) = \eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\omega = \sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi = -\frac{4}{5}$.

15999. Δίνεται η παράσταση $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sin\theta = \frac{12}{13}$.

Λύση

α) $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta) = 2\eta\mu\theta - \eta\mu\theta = \eta\mu\theta$

$$\beta) \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{5}{13}.$$

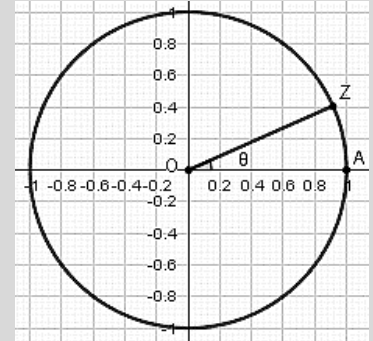
Επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι $\eta\mu\theta < 0$, άρα $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$, οπότε $A = -\frac{5}{13}$.

17933. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.



Λύση

α) Η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$ είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι ΟΔ.

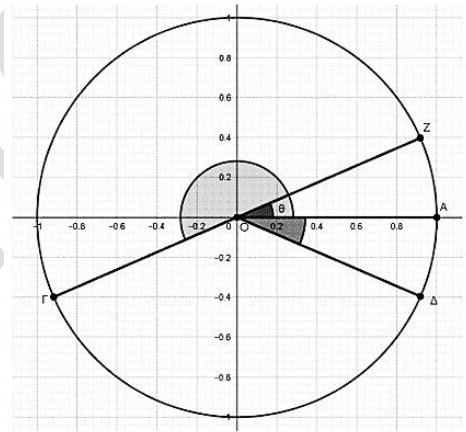
β) i) Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4, άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii) 1^{ος} τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4 \text{ και } \eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4.$$

2^{ος} τρόπος: Είναι $\eta\mu(3\pi + \theta) = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta = -0,4$ και

$$\eta\mu(4\pi - \theta) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -0,4.$$



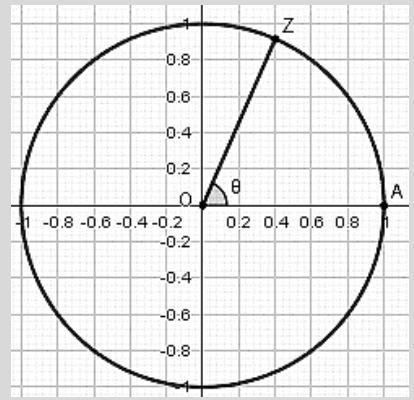
17936. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$.

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.



Λύση

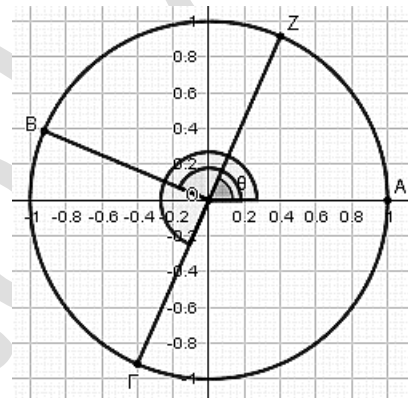
α) Η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2} + \theta$ είναι η ΟΒ.

β) i) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η τετμημένη του σημείου Ζ της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4, άρα $\sin \theta = 0,4$.

ii) 1^{ος} τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\sin(3\pi + \theta) = -0,4 \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0,4.$$

2^{ος} τρόπος: Είναι $\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -0,4$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta = 0,4$.



18229. Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu \theta$.

β) Αν $\eta\mu \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sin(\pi - \theta) \sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta) \eta\mu(-\theta).$$

Λύση

$$\alpha) \eta\mu^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \theta + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Επειδή } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ είναι } \eta\mu \theta < 0, \text{ άρα } \eta\mu \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\beta) A = \sin(\pi - \theta) \sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta) \eta\mu(-\theta) \Leftrightarrow A = -\sin \theta \cdot \sin \theta - \eta\mu \theta (-\eta\mu \theta) = -\sin^2 \theta + \eta\mu^2 \theta \Leftrightarrow$$

$$A = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}.$$

20761. Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125° .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση

$$\alpha) \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{-1125}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{25}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-25\pi}{4}.$$

$$\beta) -1125^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 45^\circ$$

$$\eta\mu(-1125^\circ) = \eta\mu(-3 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \eta\mu(-45^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu(-1125^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-3 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

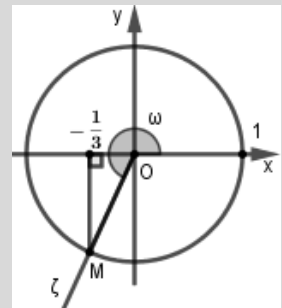
$$\epsilon\phi(-1125^\circ) = \frac{\eta\mu(-1125^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(-1125^\circ)} = 1, \sigma\phi(-1125^\circ) = \frac{\sigma\upsilon\nu(-1125^\circ)}{\eta\mu(-1125^\circ)} = 1.$$

20942. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $\angle \chi\hat{O}\zeta = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.

α) Να αιτιολογήσετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω .

γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.



Λύση

α) Το σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y), όπου $x = \eta\mu\omega$ και $y = \sigma\upsilon\nu\omega$, άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

$$\beta) \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Επειδή $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, είναι $\eta\mu\omega < 0$, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\gamma) \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{3}.$$

21237. Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι: **i.** $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **ii.** $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

Λύση

α) i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{4} = \sqrt{3}-1$

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 1 - 3 + 2\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3}.$

Επειδή $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2\sqrt{3}-3}.$

22002. Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$ **β)** $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$ **γ)** $\eta\mu 162^\circ$

Λύση

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 18^\circ) = \eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

β) $\sigma\upsilon\nu 108^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ + 18^\circ) = -\eta\mu 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

γ) $\eta\mu 162^\circ = \eta\mu(180^\circ - 18^\circ) = \eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Θέμα 4ο

18231. Έστω $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

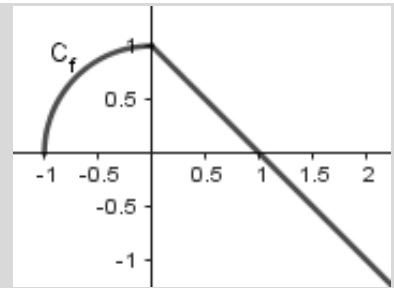
α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{3}{5}\right)$, $f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$,

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sin 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.



Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

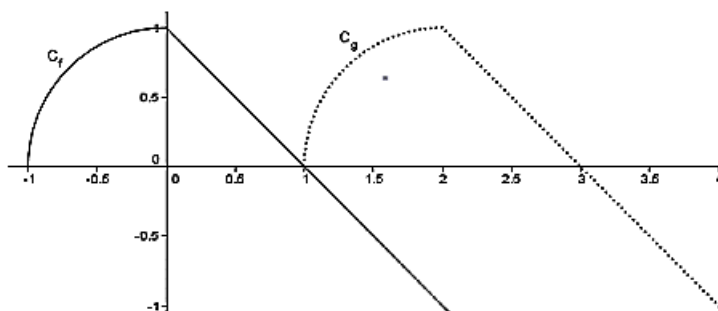
β) Είναι $0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{3}{5} < 0$ και $0 < \frac{5}{9} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{5}{9} < 0$.

Επίσης $-\frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{-27+25}{45} = -\frac{2}{45} < 0$ άρα τελικά $-1 < -\frac{3}{5} < -\frac{5}{9} < 0 \stackrel{f \nearrow [-1,0]}{\Rightarrow} f\left(-\frac{3}{5}\right) < f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Είναι $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}$ άρα $f(\sin 120^\circ) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Είναι $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $f(\eta\mu 120^\circ) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

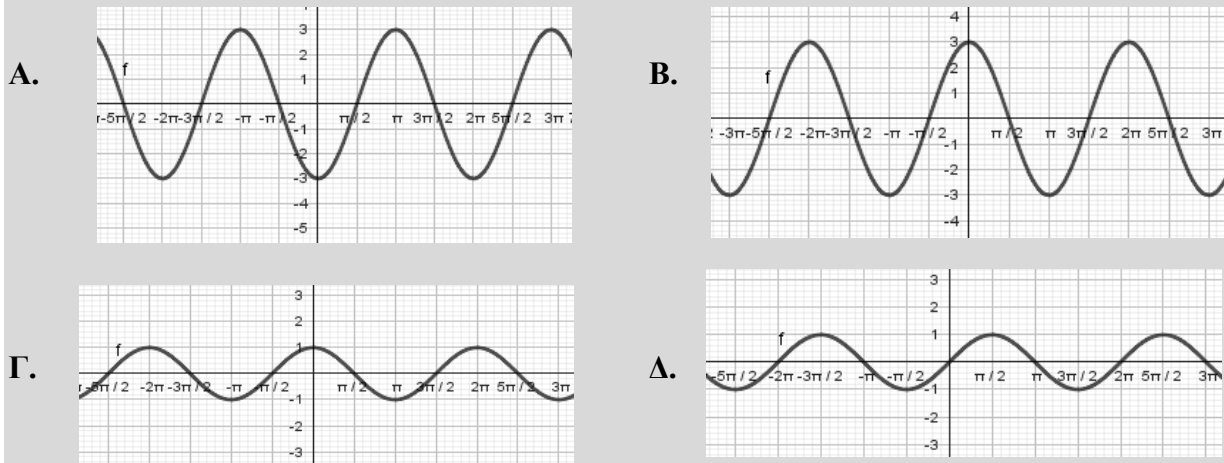


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

15009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
 β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
 γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι 3 και η ελάχιστη -3.

$$\beta) T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

γ) Επειδή $f(0) = -3$ η Α είναι η γραφική παράσταση της f .

15091. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.
 ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.
 β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

Λύση

$$\alpha) i. T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη $-\sqrt{2}$.

$$\beta) f(2025\pi) = \sqrt{2}\sin(2025\pi) = \sqrt{2}\sin(2024\pi + \pi) = \sqrt{2}\sin\pi = -\sqrt{2}$$

15172. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

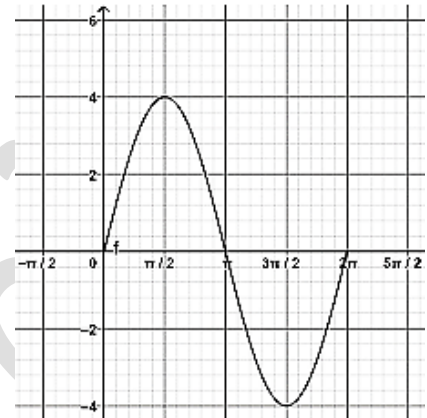
Λύση

α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu(10\pi + \pi - x) = \eta\mu(5 \cdot 2\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$.

ii. Είναι $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x) = 4\eta\mu x$.

β) Παρατηρούμε πως η $f(x) = 4\eta\mu x$ έχει την μορφή $\rho\eta\mu\omega x$ με $\rho=4$ και $\omega=1$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π . Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα $[0, 2\pi]$,

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	4	0	-4	0



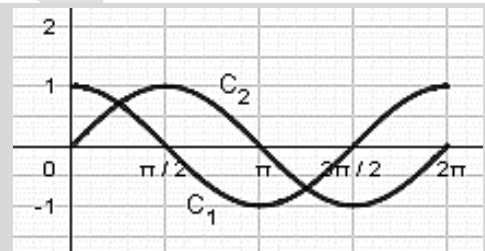
15644. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.

α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$.

ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



Λύση

α) Είναι $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Ακόμα $g(0) = \eta\mu 0 = 0$ άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

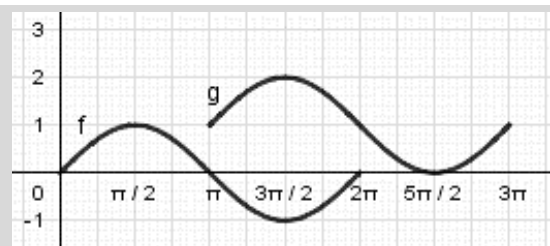
β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι

τα A και B, με τετμημένες $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

15788. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.

Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη



τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .

ii. τον τύπο της g .

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $x'x$. Οπότε είναι $D_g = [\pi, 3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.

β) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f . Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

ii. Έχουμε $g(x) = f(x - \pi) + 1$, δηλαδή $g(x) = \eta\mu(x - \pi) + 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi, 3\pi]$.

15809. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$					
$f(x) = \eta\mu 2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

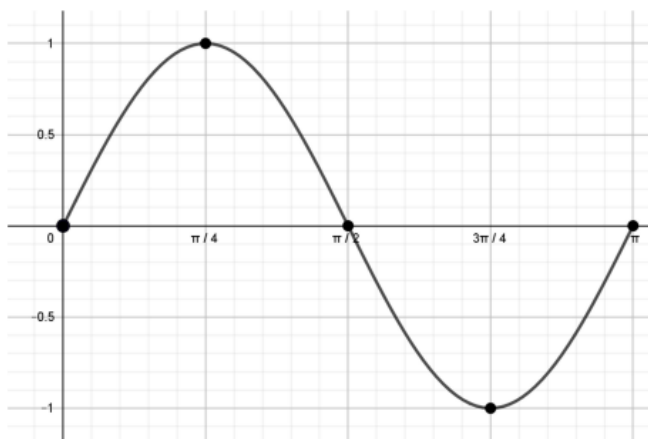
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 1$ και $\omega = 2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1. Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) i)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

β) ii)



15810. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$					
$f(x)=\sin 2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

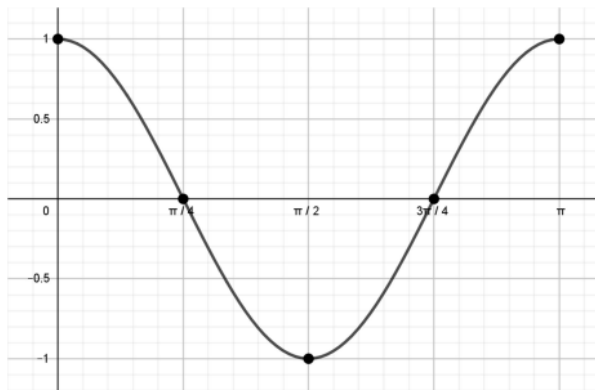
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 1$ και $\omega = 2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 . Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) i)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x)=\sin 2x$	1	0	-1	0	1

ii)

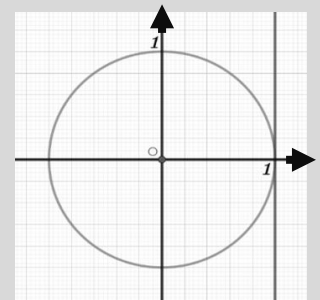


16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \varepsilon \varphi x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



Λύση

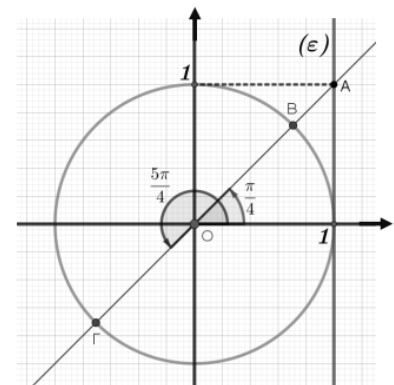
α) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Πρέπει $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{4} < k\pi < \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{7}{4} \Leftrightarrow k = 0 \text{ ή } k = 1 \text{ άρα τελικά είναι}$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}.$

β) Η εφω μίας γωνίας ω είναι τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της της γωνίας ω με την ευθεία $(\varepsilon): x=1$, η οποία αποτελεί τον



άξονα των εφαπτομένων. Οι ημιευθείες OB και OG είναι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ οι οποίες τέμνουν την $x=1$ στο A(1,1).

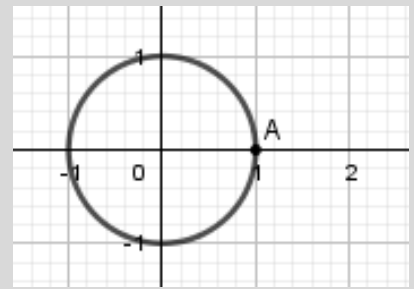
17793. Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.

α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα

$$AB = 1\text{rad}, AG = 2\text{rad} \text{ και } A\Delta = 4\text{rad}.$$

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

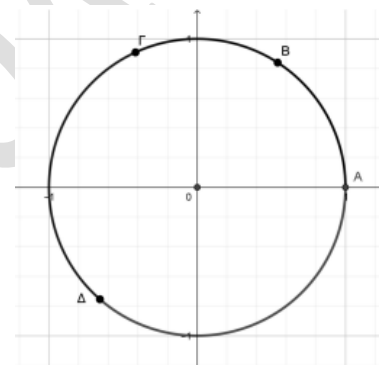


Λύση

α) Είναι $AB = 1\text{rad} < \frac{\pi}{2} \cong 1,57$, άρα το σημείο B βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Είναι $AG = 2\text{rad}$, άρα $\frac{\pi}{2} < AG < \pi$, οπότε το σημείο Γ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Είναι $A\Delta = 4\text{rad}$, άρα $\pi < A\Delta < \frac{3\pi}{2}$, οπότε το Δ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.



β) Επειδή $\angle AOB \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sin \angle AOB > 0$.

Επειδή $\angle AOG \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\sin \angle AOG < 0$. Επειδή $\angle AOD \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $\sin \angle AOD < 0$.

20660. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

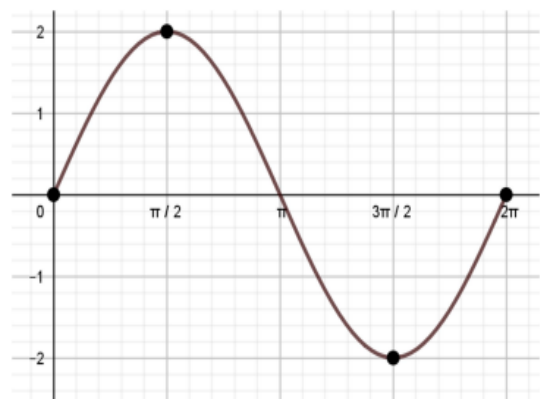
Λύση

α) Είναι

$$f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) = \eta\mu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x$$

β) i) Η f είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$ με

$\rho = 2$ και $\omega = 1$ άρα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$, μέγιστη τιμή το $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή το $-\rho = -2$



20807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

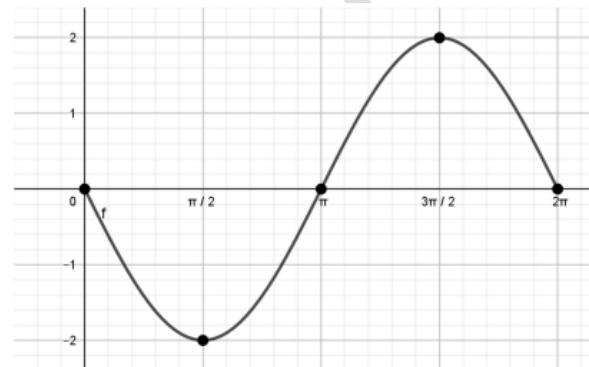
Λύση

α) Είναι $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x) = -\eta\mu x - \eta\mu x = -2\eta\mu x$.

Είναι της μορφής $f(x) = -\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 2$ και $\omega = 1$ άρα είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

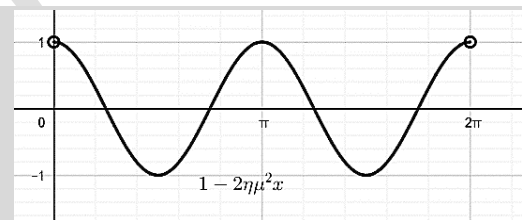


20867. Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



Λύση

α) Για $x = 0$ είναι $A = \sigma\upsilon\nu^2 0 - \eta\mu^2 0 = 1^2 - 0 = 1$

β) $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x = 1 - 2\eta\mu^2 x$

γ) $A = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x = 1$

Οι λύσεις της εξίσωσης $A = 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της $y = 1 - 2\eta\mu^2 x$ με την ευθεία $y = 1$ που βρίσκονται στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

Επειδή το κοινό τους σημείο είναι το $(\pi, 1)$, η λύση της εξίσωσης $A = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$ είναι η $x = \pi$.

21235. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$.

α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$.

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$.

Λύση

α) $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\cancel{\eta\mu 20^\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 3x}{\cancel{\eta\mu 20^\circ}} = \sigma\upsilon\nu 3x$

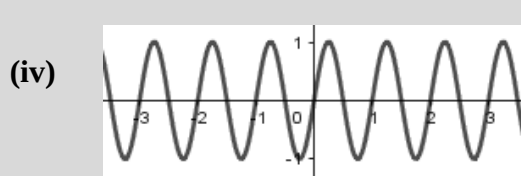
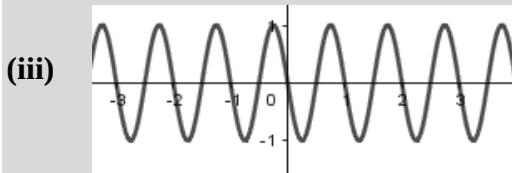
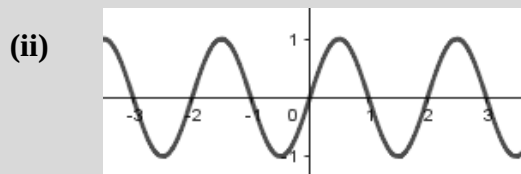
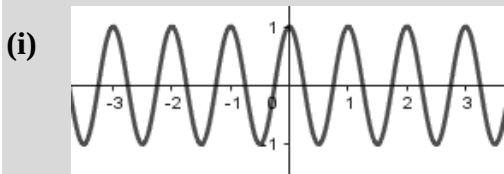
β) $f_{\max} = 3$ και $T = \frac{2\pi}{3}$.

22003. Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

β) Είναι $f(0) = \eta\mu 0 = 0$ και $f\left(\frac{1}{4}\right) = \eta\mu\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$.

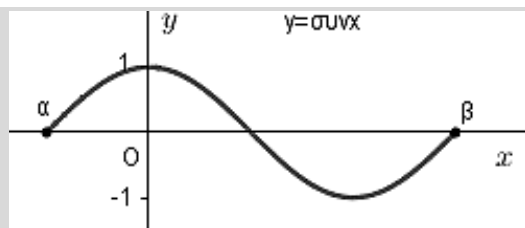
γ) Παρατηρούμε ότι περίοδο $T = 1$ έχουν οι καμπύλες (iii) και (iv).

Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (1ο τεταρτημόριο) είναι θετική, οπότε η καμπύλη (iv) είναι η γραφική παράσταση της f .

22007. Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sin x$.

α) Να βρείτε τα α και β .

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta \mu x$;



α) Τα α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $\sin x = 0$.

Οι ρίζες είναι της μορφής $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Το α είναι η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της εξίσωσης, οπότε:

$x < 0 \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow \kappa\pi < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{1}{2}$. Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του κ είναι το -1 , άρα

$$\alpha = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Το β είναι η δεύτερη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης, οπότε

$x > 0 \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow \kappa\pi > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{2}$. Η μικρότερη τιμή του ακέραιου κ είναι το 0 και η ρίζα είναι

$x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ και η δεύτερη τιμή του ακέραιου κ είναι το 1 , τότε: $\beta = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

β) Γνωρίζουμε ότι $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta \mu x$, οπότε αρκεί να μετατοπιστεί δεξιά

κατά $\frac{\pi}{2}$ για να συμπίσει με την $y = \eta \mu x$.

31568. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ;

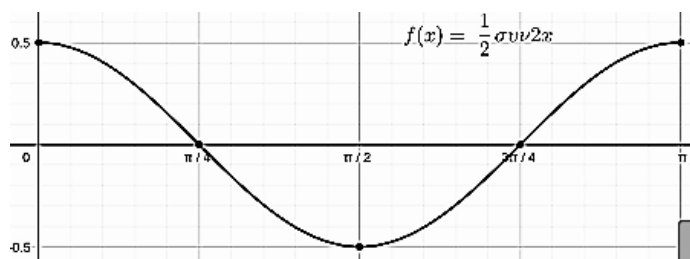
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι $\frac{1}{2}$ και η ελάχιστη $-\frac{1}{2}$. $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



31569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

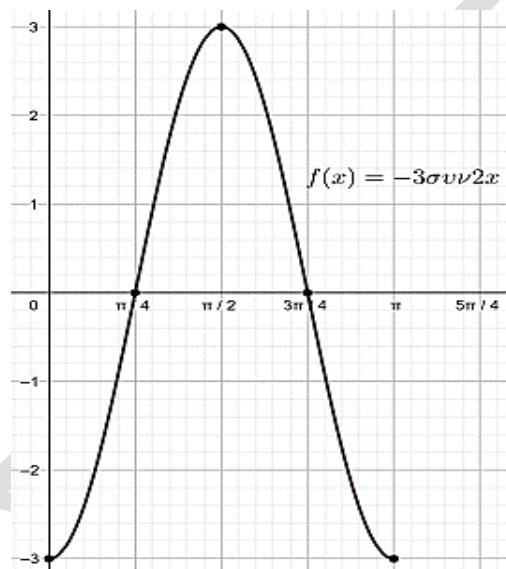
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3\sin 2x$					

Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι 3 και η ελάχιστη -3 και η περίοδος της είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3\sin 2x$	-3	0	3	0	-3



Θέμα 4ο

15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = \rho \eta \mu(\alpha x), x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \rho > 0.$$

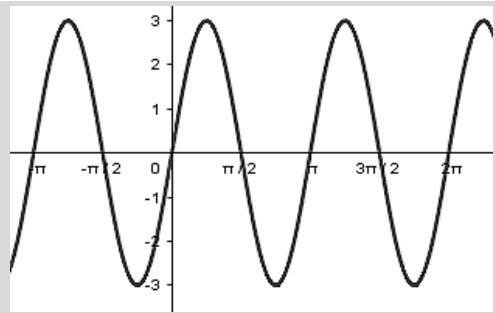
α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ .

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.



Λύση

α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$.

Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3 .

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta \mu(\alpha x)$ με $\alpha, \rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή

$-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ . Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4 = (x^2 - 1)^2 + 4$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow g(x) \geq 4$ και η ισότητα ισχύει όταν

$(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f .

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 4$ και $-3 \leq f(x) \leq 3$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

15095. Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως

φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι: $x = 0$, $y = x^2 - \pi x$, $y = \frac{1}{2} + \eta \mu x$ και $x = 3$.

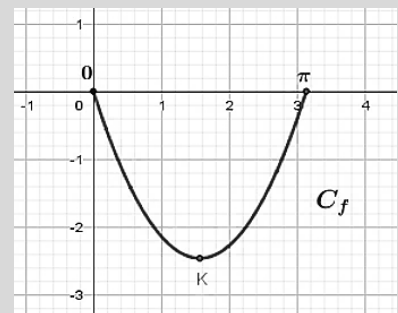
Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α) i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο

στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \frac{1}{2} + \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.



i. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

Λύση

α) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = \eta\mu x$ κατά $1/2$ προς τα πάνω.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως

αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Έχει ελάχιστο στο K το $-\frac{\pi^2}{4}$ και

μέγιστο το $f(0) = f(\pi) = 0$ για $x = 0$ και $x = \pi$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως

φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Έχει μέγιστο το $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ για

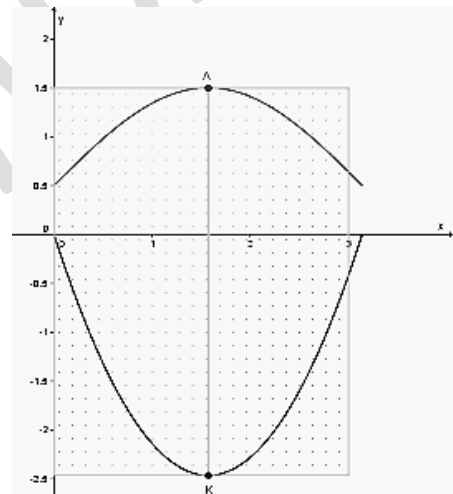
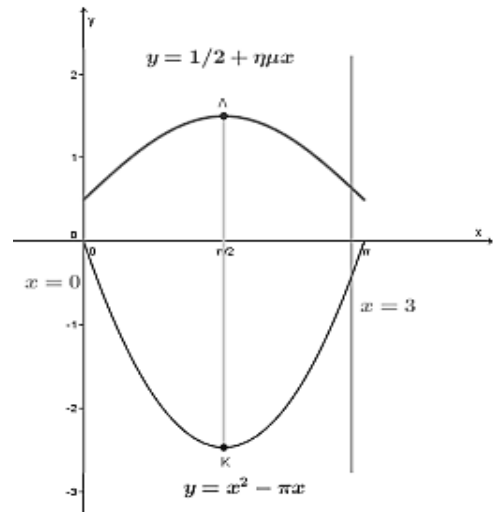
$x = \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστο το $g(0) = g(\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ για $x = 0$ και $x = \pi$.

β) Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των δύο καμπυλών είναι για $x = \frac{\pi}{2}$, γιατί τότε η f γίνεται ελάχιστη και η g μέγιστη. Η

μέγιστη απόσταση είναι: $g_{\max} - f_{\min} = \frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.

γ) Οι ελάχιστες διαστάσεις που πρέπει να έχει το ορθογώνιο πλακίδιο που θα καλύψει τη περιοχή είναι μήκος

$KL = \frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$ και πλάτος 3.



15689. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση.

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .

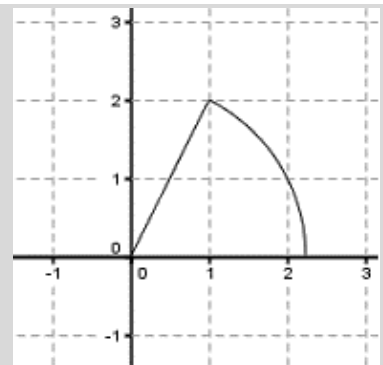
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της.

Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

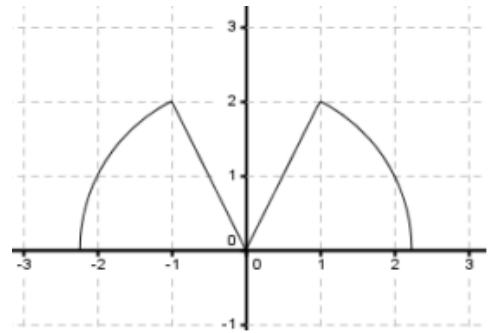
i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$.

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$



Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της C_f που λείπει συμμετρικά ως προς τον $y'y$.



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{5}, -1]$, $[0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0]$, $[1, \sqrt{5}]$. Έχει μέγιστο το 2 για $x = -1$ και $x = 1$, ενώ έχει ελάχιστο το 0 για $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ και $x = 0$.

γ) i. Επειδή $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu\frac{\pi}{4} < \eta\mu\theta < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \eta\mu\theta < 1$ και

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu\theta < \eta\mu\theta$$

ii. Επειδή $\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta \in (0, 1)$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta < \eta\mu\theta \Leftrightarrow f(\sigma\upsilon\nu\theta) < f(\eta\mu\theta)$.

15992. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu(ax)$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

Λύση

α) Το ρ είναι η μέγιστη τιμή της f και το $-\rho$ την ελάχιστη τιμή άρα είναι $\rho = 2$.

Η περίοδος της g είναι $T = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

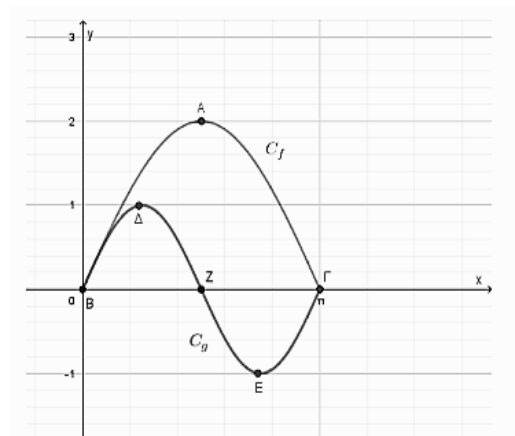
β) ii) Για την συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για την συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$g(x) = \eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

Άρα έχουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α)** Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

α) Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 1$

Είναι $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -2 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \kappa = 1$ άρα $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \geq -3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{3\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$ το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$.

Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$ το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

β) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$.

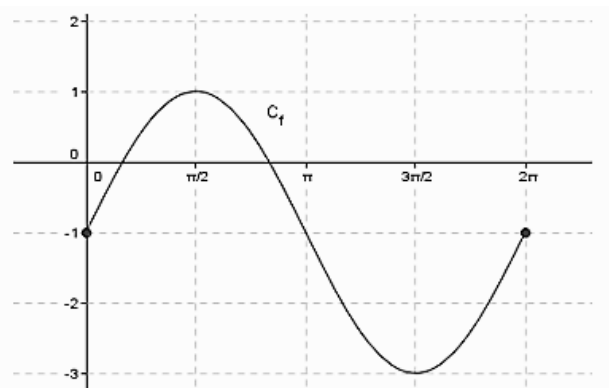
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{6}$.

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$.

γ)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	-1	1	-1	-3	-1



$$\delta) f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha - 1 = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (A).$$

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } (A) \Leftrightarrow \left(\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή}$$

$$\left(\cancel{\alpha = \kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha} \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa\pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \text{ αδύνατη αφού } \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\kappa\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } (A) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

$$\text{Αν } \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \text{ τότε από } (A) \text{ και } \eta\mu\alpha = 0 \text{ άρα } \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα για } \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0 \text{ είναι } (1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

20870. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

Λύση

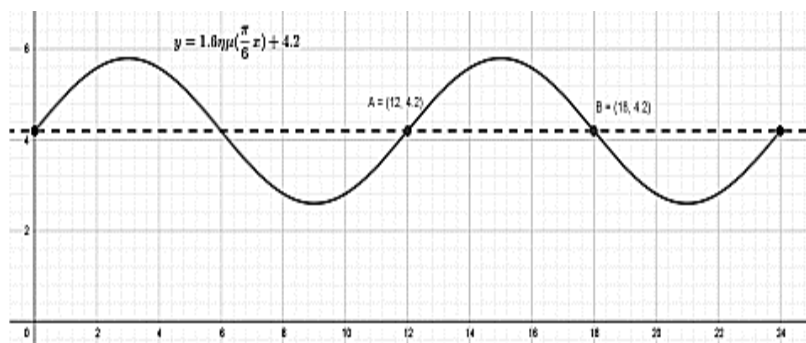
α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι $T = \cdot = 2 \cdot 6 = 12$ ώρες και $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 12\omega = 2\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Είναι } -1 \leq \eta\mu(\omega t) \leq 1 \Leftrightarrow -\alpha \leq \alpha\eta\mu(\omega t) \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha + \beta \leq \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta \leq \alpha + \beta \Leftrightarrow -\alpha + \beta \leq y \leq \alpha + \beta.$$

Επειδή το ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και το μέγιστο 5,8 μέτρα, είναι

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 2,6 \\ \alpha + \beta = 5,8 \end{cases} \Rightarrow 2\beta = 8,4 \Leftrightarrow \beta = 4,2 \text{ και } \alpha + 4,2 = 5,8 \Leftrightarrow \alpha = 1,6.$$

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο 5,8, ελάχιστο 2,6 και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων ($0 \leq t \leq 24$) είναι:

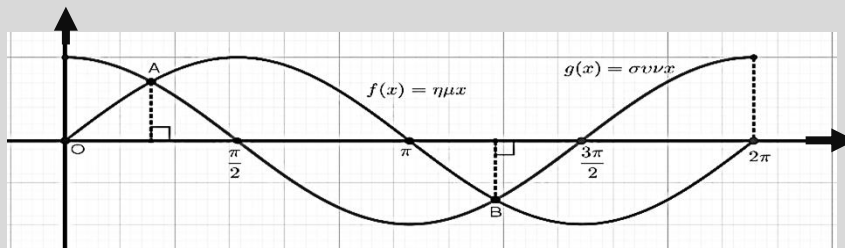


ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι: $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) + 4,2 = 1,6 \cdot 0 + 4,2 = 4,2$.

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} t\right) + 4,2$, το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα $[12, 18]$, δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \geq 4,2$.

3^ο Θέμα

15391. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης g στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης f στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6}$.

ii. $\eta\mu \frac{5\pi}{3}$ και $\eta\mu \left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

Λύση

α) 1^{ος} τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, 2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu \frac{\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η μία ρίζα είναι η $x = \frac{\pi}{4}$ επειδή $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$.

Επίσης είναι $\eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ άρα η δεύτερη ρίζα είναι η

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ επειδή $0 \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi$.

Άρα είναι $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2^{ος} τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (1) στο $[0, 2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από (1) και $\eta\mu x = 0$ άρα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο.

Άρα για $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ είναι (1) $\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Για $\kappa=0$ είναι $x = \frac{\pi}{4}$ και επειδή $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Για $\kappa=1$ είναι $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ και επειδή $0 \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Επειδή από το σχήμα έχει ακριβώς δύο ρίζες οι παραπάνω είναι και οι μοναδικές.

Αλλιώς μπορούμε να κάνουμε:

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{7}{4} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$$

β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

γ) i) Είναι $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < \pi = \frac{6\pi}{6}$ άρα $\frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \stackrel{g \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{2\pi}{3}\right) > g\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{3} > \sin \frac{5\pi}{6}$

ii) Είναι $\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6} < \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi = \frac{12\pi}{6}$ άρα $\frac{5\pi}{3} < \frac{11\pi}{6} \stackrel{f \nearrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}{\Leftrightarrow}$

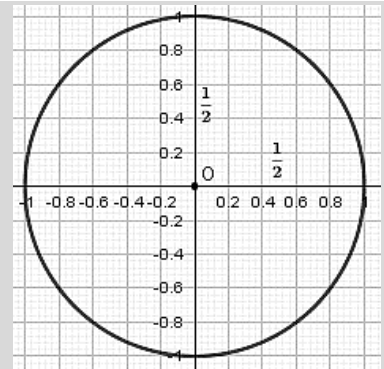
$$\stackrel{f \nearrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{5\pi}{3}\right) < f\left(\frac{11\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu \frac{5\pi}{3} < \eta\mu \frac{11\pi}{6}.$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.



Λύση

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα $y'y$. Άρα, οι γωνίες που έχουν

ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η

προβολή τους να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο

διάστημα $[0, 2\pi)$ που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες

$$\frac{\pi}{6} \text{ και } \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα $x'x$. Άρα οι γωνίες

που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο

τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\frac{1}{2}$.

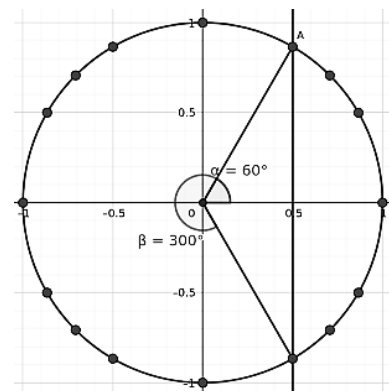
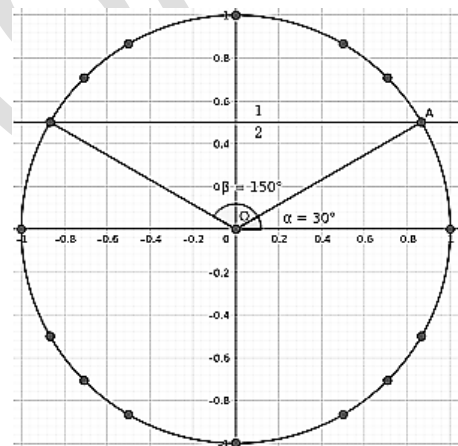
Οπότε φέρουμε την ευθεία $x = \frac{1}{2}$

και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που έχουν αυτό το

συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{3}$ και $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$$\beta) \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή }$$

$$\left(x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$



15036. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) i) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \sin(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 3$ και $\omega = 2$. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\rho = 3$ και η ελάχιστη τιμή $-\rho = -3$.

ii) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3\sin 2x = -3 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

15969. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

- α)** Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$.
β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sin x$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

Λύση

α) $\sin(13\pi + x) = \sin(12\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

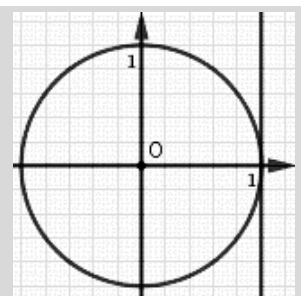
β) $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sin x - 2\sin x = -4\sin x$

γ) $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sin x = -2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \varepsilon\phi x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- α)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.
β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



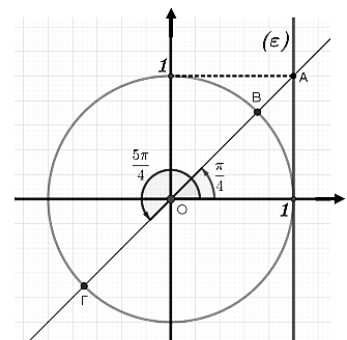
Λύση

α) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Πρέπει $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{4} < \kappa\pi < \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{7}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$ άρα τελικά είναι

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}$.



β) Η εφω μίας γωνίας ω είναι τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της της γωνίας ω με την ευθεία (ε): $x=1$, η οποία αποτελεί τον άξονα των εφαπτομένων. Οι ημιευθείες OB και OG είναι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ οι οποίες τέμνουν την $x=1$ στο $A(1,1)$.

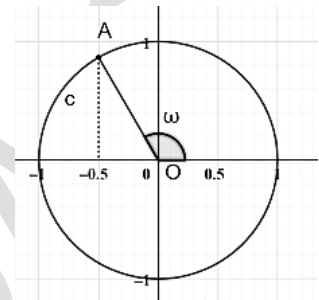
16298. Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sin \omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta \omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$.

Λύση

α) Είναι $\sin \omega = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{3}$ και επειδή η γωνία βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, είναι $\omega = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.



β) $\sin \omega = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin \omega = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

21995. Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta \mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$ **β)** $\alpha = 2$

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

Λύση

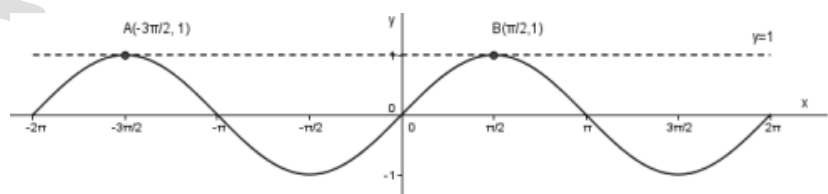
α) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γίνεται $\eta \mu x = 1$.

Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $y = \eta \mu x$, βλέπουμε ότι τα σημεία τομής της με την ευθεία $y = 1$

στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$, είναι τα $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = -\frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}.$$

β) Για $\alpha = -2$ η εξίσωση γίνεται $\eta \mu x = -2$ και είναι αδύνατη γιατί $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



32675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta \mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta \mu x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\eta \mu x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$.

Η f έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 3.

β) $f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\eta \mu x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\eta \mu x = 2 \Leftrightarrow \eta \mu x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Θέμα 4ο

14975. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται

από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα

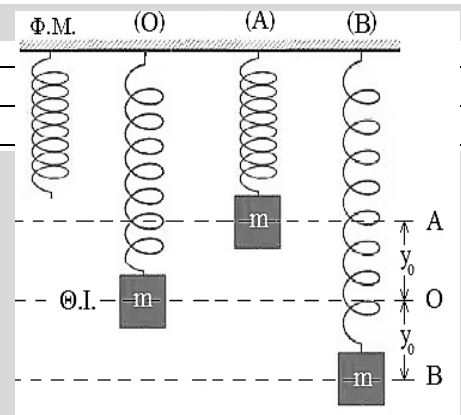
μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας),

απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με $1,1$ μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $f(t) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ η

οποία είναι της μορφής $y = \rho \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 0,2$

και $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Είναι $y(t) = 1 + f(t)$ και επειδή $1m$ είναι απόσταση από το πάτωμα όταν

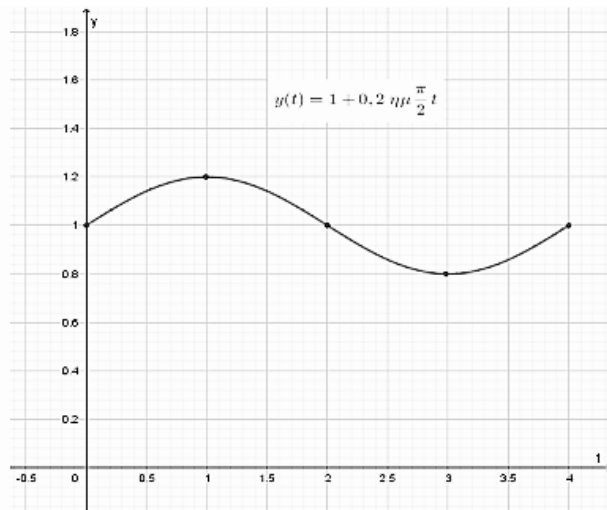
βρίσκεται στην Θ.Ι. τότε είναι $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0,2$ γιατί η f έχει μέγιστη τιμή την ρ και ελάχιστη τιμή την $-\rho$.

Για την $y(t)$ ισχύει ότι έχει μέγιστη τιμή την $1 + \rho = 1,2$ και ελάχιστη τιμή την $1 - \rho = 0,8$.

Άρα $d_{(AB)} = (OA) + (OB) = 0,4$.

β) Είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ γιατί $y(t) = 1 + f(t)$.

γ)



$$\delta) y(t) = 1,1 \Leftrightarrow 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1,1 \Leftrightarrow 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0,1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \frac{5}{3}\right) \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq 4\kappa + \frac{1}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 4\kappa \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{5}{12} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0 \quad \text{άρα } t = \frac{1}{3} \text{ sec}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq 4\kappa + \frac{5}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq 4\kappa \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{1}{12} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0 \quad \text{άρα } t = \frac{5}{3} \text{ sec}$$

15003. Δίνεται η συνάρτηση

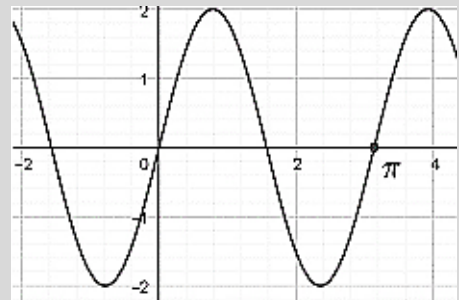
$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu\alpha x, x \in \mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.



Λύση

$$\alpha) i. f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot (\eta\mu\alpha x + 2) - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot (-\sigma\upsilon\nu\alpha x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2\alpha x + 2\eta\mu\alpha x + \sigma\upsilon\nu^2\alpha x - 1 = 1 + 2\eta\mu\alpha x - 1 = 2\eta\mu\alpha x$$

ii. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει περίοδο $T = \pi$, άρα $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την $y = 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 1$.

$$\text{Είναι } f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή}$$

$$\left(2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}, \text{ όμως } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ άρα } \kappa = 0, \text{ οπότε}$$

$$x = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}, \text{ όμως } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ άρα } \kappa = 0, \text{ οπότε}$$

$$x = \frac{5\pi}{12}. \text{ Τα ζητούμενα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες } \left(\frac{\pi}{12}, 1 \right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{12}, 1 \right).$$

15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta \mu \beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι η α , άρα $\alpha = 2$.

$$\beta) f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta \mu \frac{\beta \pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta \mu \frac{\beta \pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta \pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta \pi = 32\kappa\pi + 8\pi \Leftrightarrow \beta = 32\kappa + 8, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$\beta > 0 \Leftrightarrow 32\kappa + 8 > 0 \Leftrightarrow 32\kappa > -8 \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{4}$. Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε η μικρότερη τιμή του κ είναι το 0 και τότε η μικρότερη τιμή του β είναι 8.

$$\gamma) f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta \mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta \mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta \mu 8x = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48}, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή } \left(8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}, \kappa \in \mathbb{Z}\right).$$

$$\text{Πρέπει } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + \pi \leq 24\pi \Leftrightarrow -\pi \leq 12\kappa \leq 23\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}.$$

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Τότε $x = \frac{\pi}{48}$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48}$.

$$\text{Πρέπει } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + 5\pi \leq 24\pi \Leftrightarrow -5\pi \leq 12\kappa \leq 19\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Τότε $x = \frac{5\pi}{48}$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48}$.

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με

$\eta \mu \theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό

κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K.

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin \theta$, $\epsilon \phi \theta$, $\sigma \phi \theta$.

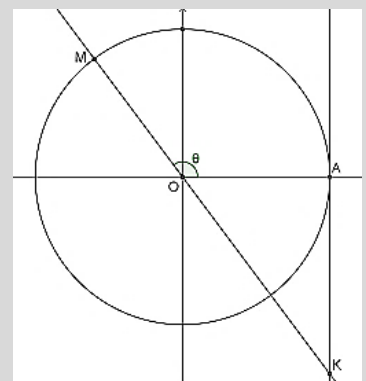
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει

$$\eta \mu \phi = \frac{3}{5} \text{ και } \sin \theta < 0.$$

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.



Λύση

$$\alpha) \eta \mu^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{3}{5}.$$

Επειδή $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\sin\theta < 0$, άρα $\sin\theta = -\frac{3}{5}$. Είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$, $\sigma\phi\theta = \frac{1}{\varepsilon\phi\theta} = -\frac{3}{4}$

β) Έστω ότι το M έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε $x = \sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $y = \eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, άρα $M\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Η ευθεία $x = 1$ είναι ο άξονας των εφαπτομένων, οπότε η τεταγμένη του K είναι η $\varepsilon\phi\theta$ και το K έχει συντεταγμένες $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

γ) i. η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο γιατί μόνο εκεί είναι $\eta\mu\varphi > 0$ και $\sin\varphi < 0$.

ii. Είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\varphi$ και η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, οπότε $\theta < \varphi$.

15026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$

άρα η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa - 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και μέγιστο το 3

όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa - \frac{1}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi + \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa + \frac{7}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}\right)$

Οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι $x = 4\kappa - \frac{1}{3}$ ή $x = 4\kappa + \frac{7}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(1-x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi - \pi x}{2}\right) =$

$1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\begin{aligned} (f(x)-1)^2 + (f(1-x)-1)^2 &= \left(\lambda + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \lambda \right)^2 + \left(\lambda + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \lambda \right)^2 \Leftrightarrow \\ (f(x)-1)^2 + (f(1-x)-1)^2 &= 4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 4\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right] = 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

15049. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Λύση

α) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$, οπότε $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

β) Είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ (1) και $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta\mu x \leq 1$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $-2 \leq \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$.

Για να είναι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f πρέπει να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\sigma\upsilon\nu x = 1$ και $-\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1$ που είναι αδύνατο γιατί $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

γ) i. Είναι $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 = 1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.

ii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ και για $x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ είναι

$\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Δύο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ και $\left(\frac{9\pi}{4}, 0\right)$.

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση

α) Είναι $f_{\min} = -2$ και $f_{\max} = 2$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$f(x) = 1. \text{ Είναι } f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k = 0$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και για $k = 1$ είναι $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$. Άρα δύο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία

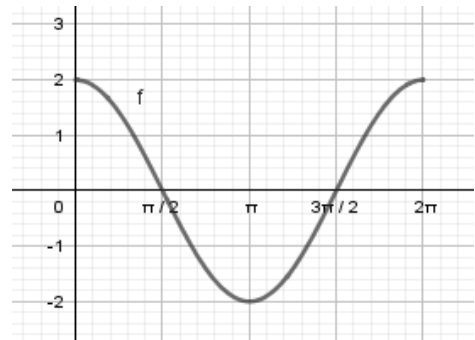
$$y = 1 \text{ είναι τα } \left(\frac{\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{7\pi}{3}, 1\right).$$

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνεχ είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Είναι } \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{15} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

δ)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
f(x)	2	0	-2	0	2



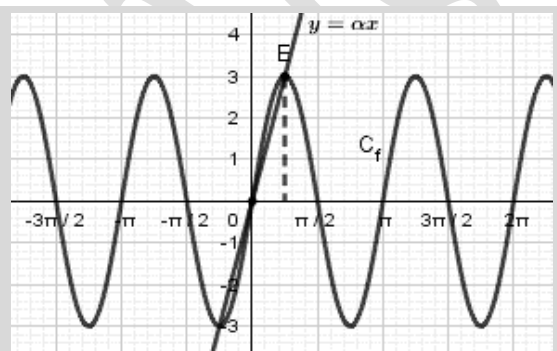
15287. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης

$$3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0.$$



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3, άρα $\rho = 3$.

Ακόμη παρατηρούμε ότι η f έχει περίοδο π , άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow 2 = \omega$. Άρα $f(x) = 3\eta\mu(2x)$

β) Η ευθεία $y = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στο $\frac{\pi}{4}$, άρα $E\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$, οπότε $3 = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{12}{\pi} = \alpha$ και η ευθεία έχει

$$\text{εξίσωση } y = \frac{12}{\pi}x.$$

$$\gamma) 3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{12}{\pi}x$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι:

- $x = 0$

- $x = \frac{\pi}{4}$ και

- $x = -\frac{\pi}{4}$ αφού $y = \frac{12}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3$ και $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3(-1) = -3$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{\pi}{4}$.

15288. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

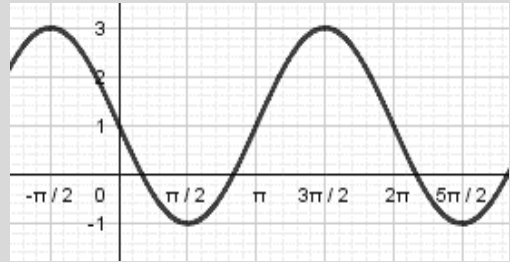
β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , και γ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για $\alpha = -2, \beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση

$f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.



Λύση

α) Είναι $T = \frac{2\pi}{3}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta\mu 3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu 3x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\eta\mu 3x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu 3x = -1$ και μέγιστο το 3 όταν $\eta\mu 3x = 1$.

β) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η g έχει περίοδο π , άρα $\frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 1$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(\frac{\pi}{2}, -1)$ ισχύει ότι:

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1 \text{ και } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\frac{\pi}{2} + 1 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -2.$$

ii. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x + 1 = 2\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu x \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in [0, \pi) \\ 3x = x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{matrix}$ ή $\begin{matrix} 3x = \pi - x \Leftrightarrow 4x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{matrix}$.

15347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Λύση

$$\alpha) f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2(-\sigma\upsilon\nu x)^2 - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha \Leftrightarrow f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$$

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x)$, οπότε η f είναι άρτια.

γ) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$, ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{\pi}{3} - 3\sin \frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sin x - 9 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 2 - 2(1 - \sin^2 x) - 9\sin x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x - 12\sin x + 11 - 2 + 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 12\sin x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$, $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$.

β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f , C_g οι γραφικές παραστάσεις των f , g αντίστοιχα.

Λύση

$$\alpha) f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x) = \alpha\eta\mu 2x - 2(-\eta\mu 2x) = \alpha\eta\mu 2x + 2\eta\mu 2x = (\alpha + 2)\eta\mu 2x.$$

β) i. Επειδή $\alpha > 0$ η f έχει μέγιστη τιμή το $\alpha + 2$, άρα $\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ)

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των

συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

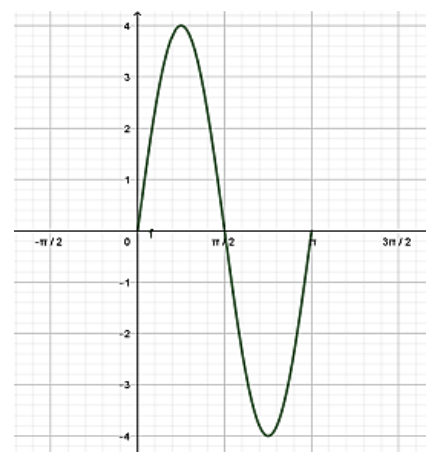
$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu 2x = 5 - \sin^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu 2x = 5 - 1 + \eta\mu^2 2x \Leftrightarrow \eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.



15821.α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση

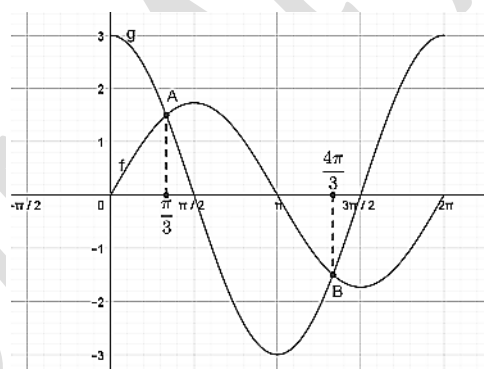
α) Έστω ότι υπάρχει γωνία x με $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ αδύνατο από προηγουμένως, άρα $\eta\mu x \neq 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \eta\mu x}{\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{3 \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα



δ) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

Με βάση τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο β σκέλος τα σημεία τομής τους A, B έχουν τετμημένες

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ και } x = \frac{4\pi}{3} \text{ αντίστοιχα.}$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$, άρα στο διάστημα

$$[0, 2\pi] \text{ είναι: } \sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right].$$

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

α) Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 1$

Είναι $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -2 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \kappa = 1$ άρα $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$

Άρα είναι $f(x) \geq -3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{3\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για

$x = \frac{3\pi}{2}$ το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3.$

Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{2}.$

Άρα είναι $f(x) \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$

το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

β) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1).$

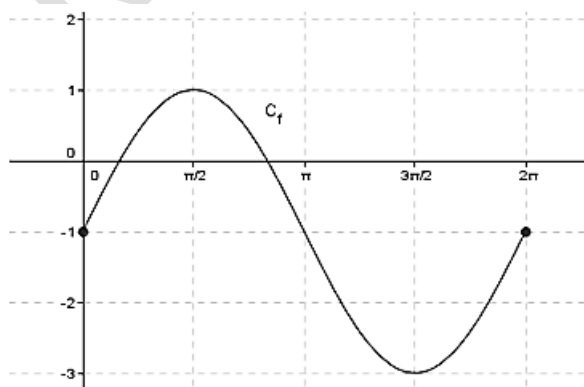
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{6}.$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}.$

γ)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
f(x)	-1	1	-1	-3	-1



δ) $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha - 1 = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (A).$

1ος τρόπος: $(A) \Leftrightarrow \left(\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \right)$ ή

$\left(\alpha = \kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa\pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \text{ αδύνατη αφού } \kappa \in \mathbb{Z} \right).$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\kappa\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

2ος τρόπος: (A) $\Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha$.

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$ τότε από (A) και $\eta\mu\alpha = 0$ άρα $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο.

Άρα για $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ είναι (1) $\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

20645. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

Λύση

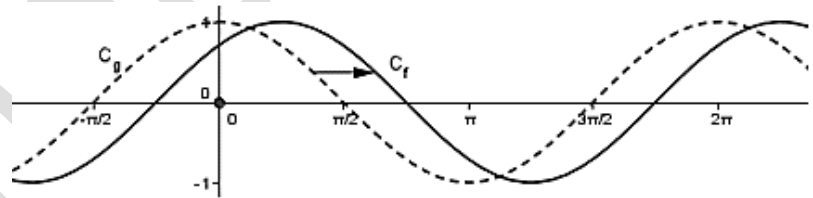
α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{4}$ προς τα δεξιά.

β)

γ)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

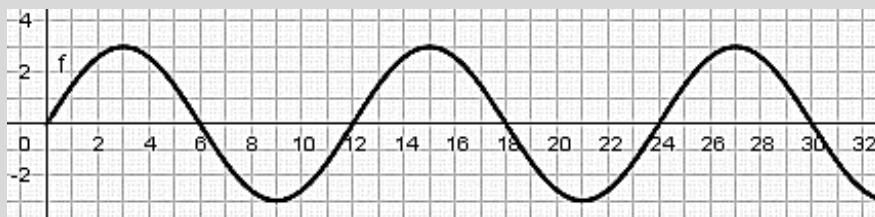


$$\delta) \sqrt{2}f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή } \left(x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right).$$

20712. Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :



α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3 , άρα υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη και τη χαμηλότερη στάθμη είναι $3 - (-3) = 6$ μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η f έχει περίοδο 12 ώρες.

γ) Η f έχει τύπο της μορφής $f(t) = \rho \eta\mu(\omega t)$, $\rho, \omega > 0$, $t \geq 0$.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 3, είναι $\rho = 3$.

Επειδή η f έχει περίοδο 12, είναι $\frac{2\pi}{\omega} = 12 \Leftrightarrow 2\pi = 12\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$, άρα $f(t) = 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $t \geq 0$.

$$\delta) f(t) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi t = 12\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow t = 12\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή } \left(\frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \pi t = 12\kappa\pi + 5\pi \Leftrightarrow t = 12\kappa + 5, \kappa \in \mathbb{Z}\right).$$

Επειδή μας ενδιαφέρει ποιες ώρες της ημέρας η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα, ισχύει ότι

$$0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + 1 \leq 24 \Leftrightarrow -1 \leq 12\kappa \leq 23 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}.$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Για $\kappa = 0$ είναι $t = 12 \cdot 0 + 1 = 1$ και για $\kappa = 1$ είναι $t = 12 \cdot 1 + 1 = 13$.

$$\text{Όμοια } 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + 5 \leq 24 \Leftrightarrow -5 \leq 12\kappa \leq 19 \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Για $\kappa = 0$ είναι $t = 12 \cdot 0 + 5 = 5$ και για $\kappa = 1$ είναι $t = 12 \cdot 1 + 5 = 17$.

20747. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1$, $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

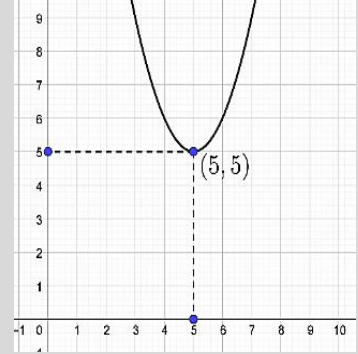
α) i. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Για $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow -2(1 - \eta\mu^2\omega) + \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow$

$$-2 + 2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\eta\mu\omega = x$ και η (1) γίνεται: $2x^2 + x - 1 = 0$ η οποία είναι 2ου βαθμού με ρίζες -1 και $1/2$, άρα

$$\eta\mu\omega = -1 \text{ ή } \eta\mu\omega = \frac{1}{2}. \text{ Όμως } \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ άρα } 0 \leq \eta\mu\omega \leq 1, \text{ οπότε } \eta\mu\omega = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Τότε } \eta\mu\omega = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}. \text{ Είναι } \epsilon\phi\omega = \epsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{ii. } f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x = 3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \eta\mu x = 3 + \frac{(\sqrt{3})^2}{3} \eta\mu x = 3 + \eta\mu x.$$

Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \eta\mu x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 4$, άρα η f έχει ελάχιστη τιμή το 2 όταν $\eta\mu x = -1$ και μέγιστη το 4 όταν $\eta\mu x = 1$.

β) i. Με βάση το σχήμα, η g έχει ελάχιστο το 5 για $x = 5$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2 \leq f(x) \leq 4$, ενώ επειδή η g έχει ελάχιστο το 5, ισχύει ότι $g(x) \geq 5$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < g(x)$, επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινά σημεία.

21244. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\phi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Λύση

α) Η f έχει ελάχιστο το $-\frac{\alpha+1}{2}$, άρα $-\frac{\alpha+1}{2} = -2 \Leftrightarrow \alpha+1 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Η f έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\beta}$, άρα $\frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\beta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 4$

$$\begin{aligned} \beta) A &= \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\epsilon\varphi x) \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\epsilon\varphi x) \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(-x)} = \frac{-\cancel{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x}{-\cancel{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \left[-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)\right] \cdot (-\eta\mu x)} = \\ &= \frac{\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x}{-\epsilon\varphi(-x) \cdot (-\eta\mu x)} = \frac{\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x}{\epsilon\varphi x \cdot (-\eta\mu x)} = \frac{\cancel{\epsilon\varphi x} \cdot \cancel{\eta\mu x}}{-\cancel{\epsilon\varphi x} \cdot \cancel{\eta\mu x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\gamma) f(x) = 2A \Leftrightarrow \frac{3+1}{2} \sigma\upsilon\nu 4x = -2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi + \pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \pi \leq \frac{2\kappa\pi + \pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 4\pi \leq 2\kappa\pi + \pi \leq 6\pi \Leftrightarrow 3\pi \leq 2\kappa\pi \leq 5\pi \Leftrightarrow 3 \leq 2\kappa \leq 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \kappa \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{και επειδή ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος, είναι το 2. Άρα } x = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Θέμα 3ο

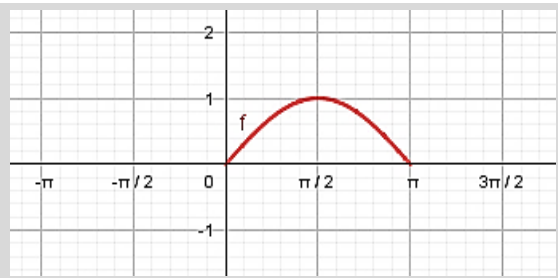
15789. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την

συνάρτηση $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.



Λύση

α) i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά $\frac{\pi}{2}$ μονάδες προς τα δεξιά.

ii) Είναι $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$ με $0 \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

β) 1ος τρόπος: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + x - \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - x + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Αδύνατη} \\ x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2ος τρόπος: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ (1). Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την (1) είναι και $\eta\mu x = 0$.

Επομένως $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο, άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

Πολυώνυμα

Πολυώνυμα

Θέμα 2ο

15113. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α)** Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Λύση

α) Είναι $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = -\cancel{2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$, οπότε το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και όχι 3ου.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha = 4$.

20640. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

- α)** Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2 - 8 + 7 - 1 = 0$ άρα ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Αφού το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 τότε $Q(1) \neq 0$

i) Είναι $R_1(1) = P(1) + Q(1) = 0 + Q(1) = Q(1) \neq 0$ άρα δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii) Είναι $R_2(1) = P(1) \cdot Q(1) = 0 \cdot Q(1) = 0$ άρα έχει ρίζα τον αριθμό 1.

21998. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 2)(x^6 + 1)$.

- α)** Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι $1 + 6 = 7$, δηλαδή 7ου βαθμού.

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^6 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2)$ ή $(x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 \text{ αδύνατη})$

Διαίρεση πολυωνύμων

Θέμα 2ο

14981. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

Λύση

α) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$

β) Επειδή $P(-2) = 0$ το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) $P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

1	0	-1	6	$\rho = -2$
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

15012. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

γ) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4$

β) $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4 = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

γ) Για να είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ πρέπει $P(3) = 0 \Leftrightarrow$

$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 27 - 27 + 6 - 2 = 0$ αδύνατο. Άρα το $x = 3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15096. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0$ και

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3 \neq 0$ άρα δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x) = (x^2 + x - 1)(2x - 1)$.

$2x^3 + x^2 - 3x + 1$	$x^2 + x - 1$
$-2x^3 - 2x^2 + 2x$	$2x - 1$
$-x^2 - x + 1$	
$x^2 + x - 1$	
0	

15642. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

β) i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2(1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 5 - 3 - 2 = 0$ άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. $P(0) = 2(0-1)^{20} - 3(0-1)^{10} + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$

ii. Επειδή $P(0) \neq 0$ το x δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

15643. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

α) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$.

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)(2x-1)$.

Λύση

α) i. Είναι $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 6 = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$ άρα το $x-3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Με βάση τη διπλανή διαίρεση είναι

$$P(x) = (x-3)(2x^2 + 3x - 2).$$

$$\beta) P(x) = (x-3)(2x^2 + 3x - 2) = (x-3)(2x^2 + 4x - x - 2) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (x-3)(2x(x+2) - (x+2)) = (x-3)(x+2)(2x-1),$$

επομένως το $(x-3)(2x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$	$x - 3$
$-2x^3 + 6x^2$	$2x^2 + 3x - 2$
$3x^2 - 11x + 6$	
$-3x^2 + 9x$	
$-2x + 6$	
$+2x - 6$	
0	

20941. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

Λύση

α) Είναι $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 3 = -8 + 8 - 2 + 3 = 1 \neq 0$, άρα το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Με βάση το διπλανό σχήμα

Horner είναι $\pi(x) = x^2 + 1$.

1	2	1	3	$\rho = -2$
	-2	0	-2	
1	0	1	1	

$$\gamma) P(x) = (x+2)(x^2 + 1) + 1$$

21997. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x) : (x-2)$;

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι $1 + 1 + 1 = 3$, δηλαδή 3ου βαθμού.

β) Για $x \neq 2$ είναι $P(x) : (x-2) = \frac{P(x)}{(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)} = (x-1)(x-3)$, οπότε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$ είναι $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι μηδέν.

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

15040. Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Λύση

α) Για να είναι το 1 ρίζα πρέπει $1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - 7 + 6 = 0$ ισχύει.

β) Είναι $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $x^2 + x - 6$.

1	0	-7	6	$\rho=1$
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

γ) $x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$$\left(x^2 + x - 6 = 0, \Delta = 25, x = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \text{ ή } x = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \right).$$

15047. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^4 - 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 5 + 7 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $\pm 1, \pm 2$.

$$\text{Είναι } P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 2 = -12 \neq 0,$$

$$P(2) = 2^4 - 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 0, \text{ άρα και το } 2 \text{ είναι ρίζα του πολυωνύμου.}$$

15175. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) 1^{ος} τρόπος: Εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho = 1$:

Προκύπτει ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$.

1	-1	1	-1	$\rho=1$
	1	0	1	
1	0	1	0	

2^{ος} τρόπος: $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$

15176. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Αν $P(x) = (x-1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$ άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, οπότε το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) > 0 \stackrel{x^2 - x + 2 > 0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

15246. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

Λύση

$$\alpha) P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) =$$

$$(x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

$$\beta) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty) \cup \{-1\}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$P(x)$	-	-	+	+

15247. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x) = (2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

Λύση

$$\alpha) P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = x^2(2x-1) + (2x-1) \Leftrightarrow P(x) = (2x-1)(x^2+1).$$

$$\beta) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+1) \geq 0 \stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (2x-1)(x^2-2) + 1 \Leftrightarrow$

$$P(x) = 2x^3 - 4x - x^2 + 2 + 1 = 2x^3 - x^2 - 4x + 3.$$

β) i. Είναι $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι $P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3)$.

2	-1	-4	3	$\rho=1$
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$$\left(2x^2 + x - 3 = 0, \Delta = 1 + 24 = 25, x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1, x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \right).$$

15618.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) $P(x) = 2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή

$$\left(2x^2 + x - 1 = 0, \Delta = 1 + 8 = 9, x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \right)$$

15653. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x) = (x-1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Λύση

α) i.

1	1	2	2	$\rho = -1$
	-1	0	-2	
1	0	2	0	

ii. $P(x) = (x+1)(x^2+2)$.

β) $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2) < 0 \stackrel{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

15654. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$ άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β)

1	0	-7	6	$\rho=1$
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ ή } \left(x^2 + x - 6 = 0, \Delta = 25, x = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \text{ ή } x = \frac{-1-5}{2} = -3 \right)$$

15674. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

Λύση

α) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 3x^2 + 2x + 1$ και το υπόλοιπο είναι 3, άρα

$$P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3.$$

3	-1	-1	2	$\rho=1$
	3	2	1	
3	2	1	3	

β) $P(x) < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3 < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) < 0 \quad (1)$

Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -8 < 0$, άρα $3x^2 + 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

15695. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

Λύση

α) Με βάση το σχήμα Horner είναι $P(x) = x^3 + 2x - 3 \Leftrightarrow$

$$P(x) = (x+1)(x^2 + x + 3) - 6.$$

1	0	2	-3	$\rho=-1$
	-1	1	-3	
1	-1	3	-6	

β) $P(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 3) - 6 + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x+1)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x+1=0 \Leftrightarrow x=-1) \text{ ή } (x^2 + x + 3 = 0, \Delta < 0 \text{ αδύνατη}).$$

15989. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Λύση

α) Είναι $P(1)=1, P(-1)=3 \neq 0, P(-2)=-8 \neq 0, P(2)=0, P(4)=28 \neq 0, P(-4)=-84 \neq 0$ οπότε έχει μοναδική ρίζα το 2.

β) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - 2(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow (x=2)$ ή $(x=\pm\sqrt{2})$.

17241. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Λύση

α) i. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 - x + 2$ και το υπόλοιπο είναι 0, άρα

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$$

1	0	1	2	$\rho = -1$
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$, άρα $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:
 $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

18583. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

α) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

β) Αν $P(x) = (2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) i. Με βάση το σχήμα Horner είναι $\pi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ και $\nu = 0$.

ii. $P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 2)$

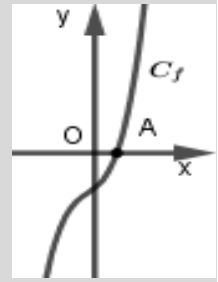
β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\right) \text{ ή } (x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2).$$

2	-1	-8	4	$\rho = 2$
	-4	6	-4	
2	3	-2	0	

20856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.
ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο $(0,1)$.

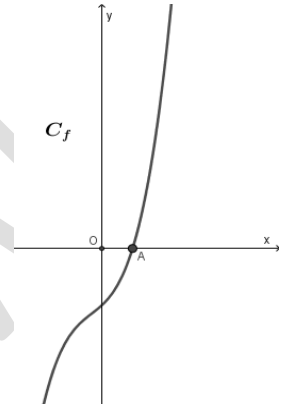


Λύση

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -1 που είναι το 1 και το -1 . Είναι $f(1) = 2 + 1 + 1 - 1 = 3 \neq 0$ και $f(-1) = -2 + 1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) i. Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο A , η τετμημένη του A είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Είναι $f(1) = 3 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 0 και 1 .



18230. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

- α)** Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x - 2)$.
β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 8 \cdot 2 - 4 = 16 + 4 - 16 - 4 = 0$ άρα το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 = x^2(2x + 1) - 4(2x + 1) \Leftrightarrow$
 $P(x) = (2x + 1)(x^2 - 4) = (2x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

γ) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left(2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \right) \text{ ή } (x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2) \text{ ή } (x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2)$.

Θέμα 4ο

14955. Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

- α)** Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.
β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.
γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

Λύση

α) Για $x = 2$ εκατομμύρια χρόνια, είναι $T(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2 - 30 = 8 - 40 + 62 - 30 = 0$ °C.

β) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

$$T(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 15)$$

1	-10	31	-30	$\rho=2$
	2	-16	30	
1	-8	15	0	

Το τριώνυμο $x^2 - 8x + 15$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, οπότε

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5), \text{ άρα } T(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5), \text{ οπότε } \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5.$$

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x) < 0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών $T(x)$ για θετικές τιμές του x .

Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

x	$-\infty$	2	3	5	$+\infty$		
$x-2$	-	o	+	+	+		
$x^2-8x+15$	+	+	o	-	o	+	
$T(x)$	-	o	+	o	-	o	+

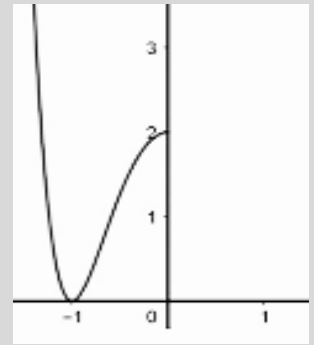
15005. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.



Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x), \text{ άρα η } f \text{ είναι άρτια.}$$

$$\beta) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^3 - 3\omega + 2 = 0$.

Παρατηρούμε ότι $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$, οπότε με βάση το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega - 2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega^2 + \omega - 2 = 0$

Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ που απορρίπτεται.

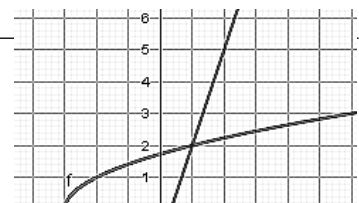
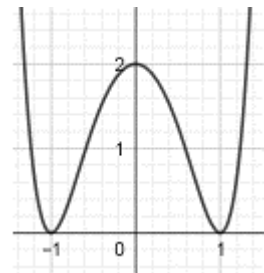
$$\text{Άρα } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Επομένως η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την διπλανή μορφή.

δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$.

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	



15037. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x-1$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$, άρα $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g και επειδή κοινό τους σημείο είναι το $(1,2)$, έχουμε: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x , όπου η C_f είναι κάτω από C_g . Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \in (1, +\infty)$.

ii. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1$ (1)

Αν $3x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$, άρα $x \in \left[-3, \frac{1}{3}\right)$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ η (1) γίνεται $(\sqrt{x+3})^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3 < 9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 9x^2-7x-2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{9}\right) \cup (1, +\infty)$. Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x \in (1, +\infty)$.

15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Λύση

α) i. Είναι $P(0) = 2 \neq 0$ οπότε το 0 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ii. Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν $P(\rho) = 0 \Leftrightarrow 2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0$ (1)

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - 5\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\frac{1}{\rho^4} - 5\frac{1}{\rho^3} + 4\frac{1}{\rho^2} - 5\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\rho^4 \frac{1}{\rho^4} - 5\rho^4 \frac{1}{\rho^3} + 4\rho^4 \frac{1}{\rho^2} - \rho^4 \frac{5}{\rho} + 2\rho^4 = 0 \Leftrightarrow 2 - 5\rho + 4\rho^2 - 5\rho^3 + 2\rho^4 = 0 \text{ που ισχύει λόγω της (1).}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι $\pm 1, \pm 2$. Επειδή θέλουμε θετική ρίζα, πιθανές είναι το 1 και το 2. Είναι $P(2) = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 16 - 40 + 16 - 10 + 2 = 0$ οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

$$P(x) = (x - 2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (x - 2)[x^2(2x - 1) + (2x - 1)] = (x - 2)(2x - 1)(x^2 + 1)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2) \text{ ή } \left(2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \right) \text{ ή } (x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = -1 \text{ αδύνατη})$$

δ) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2 \right).$$

2	-5	4	-5	2	$\rho = 2$
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

x	$-\infty$	$1/2$	2	$+\infty$	
$x-2$	-		0	+	
$2x-1$	-	0	+	+	
x^2+1	+		+	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+

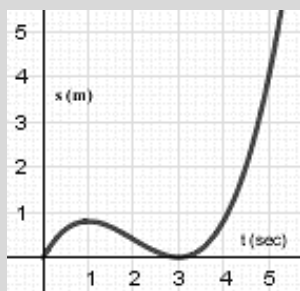
15094. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.)

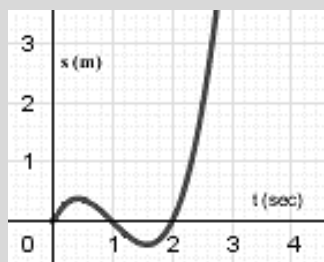
β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

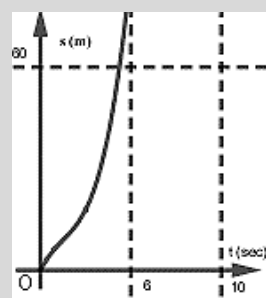
δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



(I)



(II)



(III)

Λύση

α) $S(0) = 0, S(t) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 16 - 24 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$$(t - 3)(t^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ ή } t^2 = -5 \text{ αδύνατο.}$$

1	-3	5	-15	$\rho = 3$
	3	0	15	
1	0	5	0	

γ) Είναι $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5)$

Το τριώνυμο $t^2 - 3t + 5$ έχει $\Delta = -11 < 0$, οπότε για κάθε $t \geq 0$ είναι $t^2 - 3t + 5 > 0$, οπότε και $S(t) \geq 0$.

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (III) είναι μη αρνητική και γνήσιως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

15174. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\nu(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$x^4 + x^3 + \alpha x - 4$	$x^2 - 3x + 2$
$-x^4 + 3x^3 - 2x^2$	$x^2 + 4x + 10$
$4x^3 - 2x^2 + \alpha x - 4$	
$-4x^3 + 12x^2 - 8x$	
$10x^2 + (\alpha - 8)x - 4$	
$-10x^2 + 30x - 20$	
$(\alpha + 22)x - 24$	

$$P(x) = \delta(x)(x^2 + 4x + 10) + (\alpha + 22)x - 24$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει

$$(\alpha + 22)x - 24 = 24x - 24 \Leftrightarrow \alpha + 22 = 24 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

β) Για $\alpha = 2$ είναι $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$

$$\text{είναι το } P(1) = 1^4 + 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) + 2(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x^2 + 2 = 0 \text{ αδύνατη.}$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι τα $(-2, 0)$ και $(1, 0)$.

iii. $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

1	1	0	2	-4	$\rho = 1$
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x+2$	-	o	+	+	
$x-1$	-	-	o	+	
x^2+2	+	+		+	
$P(x)$	+	o	-	o	+

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

Λύση

α)

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\
 \hline
 -x^5 + 4x^3 & x^3 - 1 \\
 \hline
 -x^2 + \alpha x + \beta & \\
 \hline
 x^2 & -4 \\
 \hline
 \alpha x + \beta - 4 &
 \end{array}$$

β) Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $\alpha x + \beta - 4 = 4x + 1$
 και αυτό ισχύει όταν $\alpha = 4$ και $\beta - 4 = 1 \Leftrightarrow \beta = 5$.

γ) i.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+	
$x - 1$	-	-	0	+	+	+	
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+	+	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$$

$$\text{ii. } P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow (1)(x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$$

το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta < 0$ οπότε $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι λύσεις της (1) είναι $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$.

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

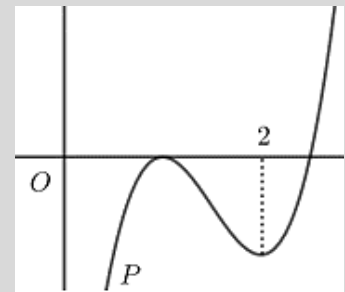
i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$

$$\text{είναι } -1, \text{ να δείξετε ότι: } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



Λύση

α) i. Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$, ισχύει ότι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta - 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το $(x - 2)$ είναι -1 , ισχύει ότι

$$P(2) = -1 \Leftrightarrow 16 + 4\alpha + 2\beta - 5 = -1 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = -12 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -6. \text{ Άρα } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 - \alpha = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - (-9) = 12 \end{cases}$$

β) Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x-1)(2x^2 - 7x + 5).$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες

$$x=1 \text{ ή } x=\frac{5}{2}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \text{ είναι κάτω από τον}$$

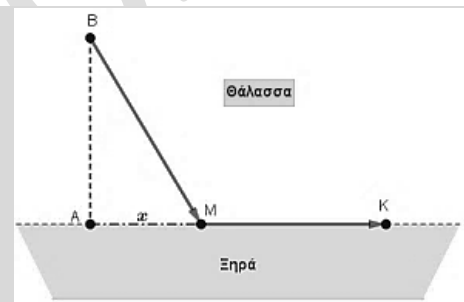
άξονα $x'x$ όταν $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

2	-9	12	-5	$\rho=1$
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$2x^2-7x+5$	+	0	-	+
$P(x)$	-	0	-	+

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $(\frac{5}{2},0)$, οπότε βλέπουμε ότι η P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$.

15436. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης,



είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4+x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η: $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$, $x \in [0, 4]$.

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

Λύση

Είναι $AM = x$, $AB = 2$ και $MK = AK - AM = 4 - x$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} AM \geq 0 \\ MK \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 4].$$

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAM προκύπτει:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Leftrightarrow BM^2 = 4 + x^2 \stackrel{BM \geq 0}{\Leftrightarrow} BM = \sqrt{4+x^2}$$

β) Ο χρόνος κίνησης από το B στο M είναι $t_1 = \frac{BM}{u_k} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$ και ο χρόνος κίνησης από το M στο K

είναι $t_2 = \frac{MK}{u_t} = \frac{4-x}{5}$. Άρα είναι $t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$, $x \in [0, 4]$.

γ) Είναι $t(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} + 3(4-x) = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} + 12 - 3x = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} = 3x + 8 \quad (1)$

Αφού $x \in [0, 4]$ τότε $3x + 8 > 0$ άρα $(1) \Leftrightarrow 25(4+x^2) = (3x+8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$

$16x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow (4x-6)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$ δεκτή.

Άρα το σημείο Μ θα απέχει 1,5 Km από το σημείο Α.

15677. Δίνεται το πολύωνμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολύωνμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεσης $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

Λύση

α) Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολύωνμο $Q(x)$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολύωνμο, που συμβαίνει μόνο όταν

$$\begin{cases} \alpha - 4 = 0 \\ \beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -2 \end{cases}.$$

$x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$	$x^2 - 2x + 1$
$-x^4 + 2x^3 - x^2$	$x^2 - 2$
$-2x^2 + \alpha x + \beta$	
$2x^2 - 4x + 2$	
$(\alpha - 4)x + \beta + 2$	

β) i. Είναι $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$.

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$	$x^2 + 5$
$-x^4 \quad -5x^2$	$x^2 - 2x - 6$
$-2x^3 - 6x^2 + 4x - 2$	
$2x^3 \quad +10x$	
$-6x^2 + 14x - 2$	
$6x^2 \quad +30$	
$14x + 28$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$$

ii. $P(x) = 14(x + 2) \Leftrightarrow (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28 = 14x + 28 \Leftrightarrow$

$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \text{ αδύνατη}) \text{ ή } (x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7}).$

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $k = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + k(-x) - 1 = x^4 + kx - 1 \Leftrightarrow$

$$x^4 - kx - 1 = x^4 + kx - 1 \Leftrightarrow -k = k \Leftrightarrow 2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

β) Για $k = 0$ είναι $f(x) = x^4 - 1$.

i. Για κάθε $x_1 < x_2 \leq 0$ είναι $x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow x_1^4 - 1 > x_2^4 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 0]$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow f(x) \geq -1 = f(0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

15790. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

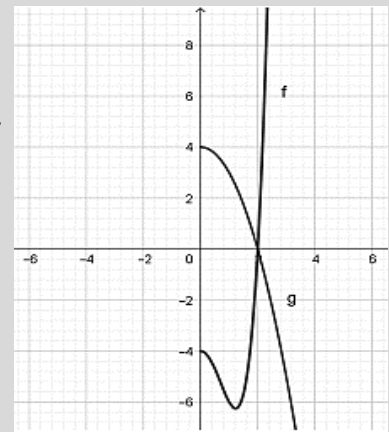
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



Λύση

α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και είναι:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x) \text{ και}$$

$$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$$

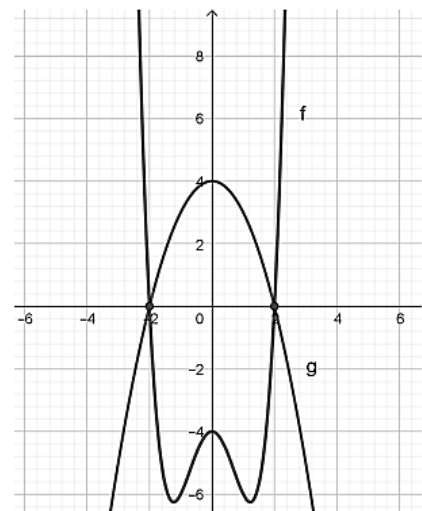
β) Οι συναρτήσεις f, g είναι άρτιες άρα οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

γ) i) Γραφικά παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες -2 και 2 άρα

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Αλγεβρικά έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad (1)$$



Θέτουμε $x^2 = y \geq 0$ και είναι $(1) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$

με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $y_1 = -2$, η οποία απορρίπτεται και $y_2 = 4$ δεκτή.

Άρα $y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

ii) Γραφικά παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(-2, 2)$. Άρα $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$.

Αλγεβρικά ομοίως θέτουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα $x^2 = y \geq 0$ και είναι

$$y^2 - 2y - 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-2, 4) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

17919. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η

ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.

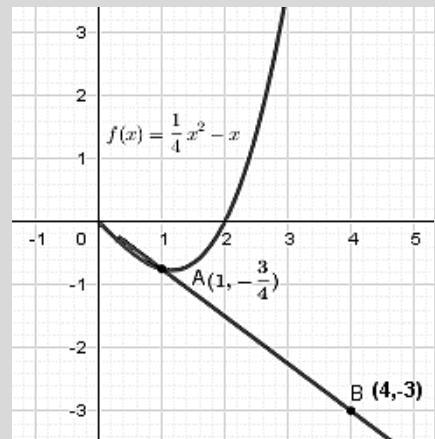
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β)

ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .



Λύση

α) Η ευθεία AB είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$ άρα προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = \alpha + \beta \\ -3 = 4\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 4\alpha + 4\beta \\ -3 = 4\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 4\alpha = 4\beta \\ -3 - 4\alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\beta \\ -3 - 4\alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$.

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - (-x) = -\frac{1}{4}x^3 + x = -f(x)$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

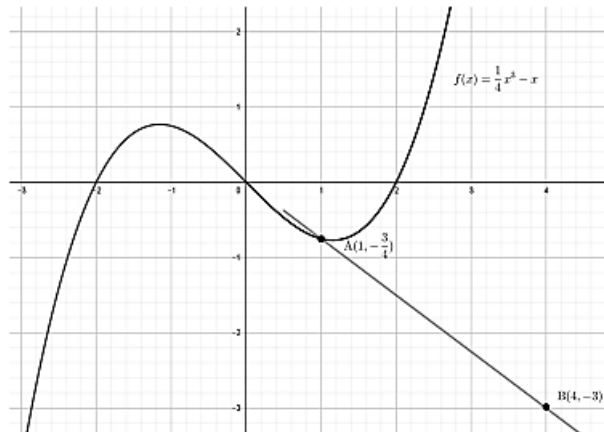
γ) 1^{ος} τρόπος: Είναι $f(0) = 0$ και

$$f(-1) = -f(1) = \frac{3}{4} \text{ και λόγω συμμετρίας της } f$$

ως προς την αρχή των αξόνων και αφού αυτά είναι σημεία

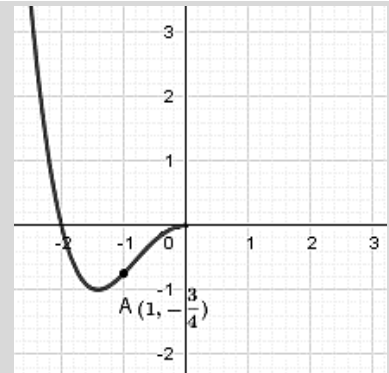
και της ευθείας τότε τα κοινά σημεία της ευθείας με την συνάρτηση f είναι τα

$$A\left(1, -\frac{3}{4}\right), O(0, 0), K\left(-1, \frac{3}{4}\right).$$



2ος τρόπος: $f(x) = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow x^3 - 4x = -3x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$
 $x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } (x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1)$

17925. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Για $\alpha = -1$, i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

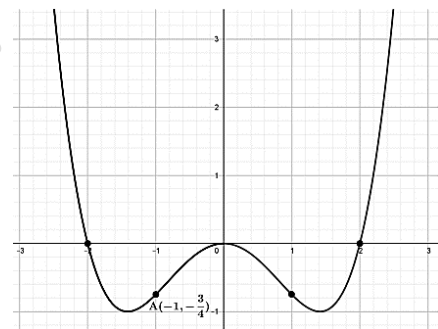
Λύση

17925.α) Από το σχήμα είναι $f(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2)^4 + \alpha(-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{4} + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -1$

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 =$
 $\frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x)$

ii) Η f είναι άρτια σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα άρα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



γ) $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{3}^4 - \sqrt{3}^2 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

17943. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60\text{m}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη x και y αντίστοιχα και υποτείνουσα με μήκος $x + 2$. Επίσης έχει εμβαδόν $E = 60 \Leftrightarrow \frac{xy}{2} = 60 \Leftrightarrow y = \frac{120}{x}$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{120}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι } (x+2)^2 &= x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 14400 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3600 = 0 \end{aligned}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες και θετικές ($x > 0$) ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$, οι οποίες είναι μικρότερες του 16 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15.

Δοκιμάζοντας τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 παρατηρούμε ότι δεν είναι ρίζες.

Βάζοντας το 15 είναι $15^3 + 15^2 - 3600 = 15^2(15+1) - 3600 = 225 \cdot 16 - 3600 = 0$

Άρα η μία κάθετη έχει μήκος 15 cm, η δεύτερη μήκος 8 cm και η υποτείνουσα μήκος 17 cm

γ) Εκτελούμε την διαίρεση $(x^3 + x^2 - 3600) : (x - 15)$:

$x^3 + x^2 + 0x - 3600$	$x - 15$
$-x^3 + 15x^2$	$x^2 + 16x + 240$
$16x^2 + 0x - 3600$	
$-16x^2 + 240x$	
$240x - 3600$	
$-240x + 3600$	
0	

Είναι $x^3 + x^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x^2 + 16x + 240) = 0 \Leftrightarrow x = 15$ ή $x^2 + 16x + 240 = 0$ αδύνατη

γιατί έχει διακρίνουσα $\Delta = 256 - 240 = -704 < 0$

Άρα υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο.

18221. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

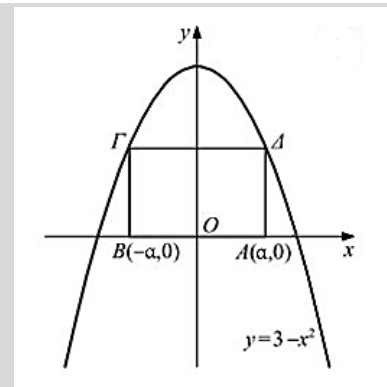
i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι

$$E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.



Λύση

α) i. Η τετμημένη του σημείου Δ είναι $x_\Delta = \alpha$ και επειδή είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι $y_\Delta = 3 - \alpha^2$, άρα $\Delta(3 - \alpha^2)$. Όμοια $\Gamma(-\alpha, 3 - \alpha^2)$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι: $E = (AB) \cdot (A\Delta) = 2\alpha \cdot (3 - \alpha^2) = 6\alpha - 2\alpha^3$.

ii. Για $\alpha = 1$ είναι $E = f(1) = -2 + 6 = 4$ τετραγωνικές μονάδες.

β) Αρκεί για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$, να είναι

$$E \leq 4 \Leftrightarrow -2\alpha^3 + 6\alpha \leq 4 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 6\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

γ) Επειδή $E \leq 4$, η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδό είναι 4, άρα

$$E = 4 \Leftrightarrow -2\alpha^3 + 6\alpha = 4 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 6\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

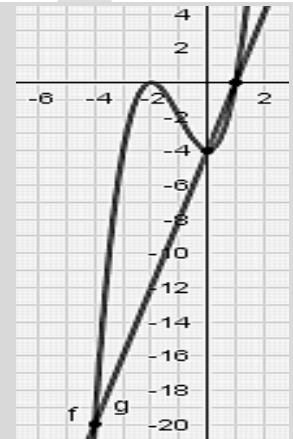
$$(\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 2) \geq 0 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2 \text{ απορρίπτεται.}$$

18696. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $g(x) = 4x - 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0]$.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών τους παραστάσεων, επομένως $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -4$ ή $x = 0$ ή $x = 1$.

$$\text{Αλγεβρικά: } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } (x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -4)$$

$$\gamma) g(x) < f(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 + 3x - 4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-4, 0) \cup (1, +\infty)$$

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
x	-		-	+	+
$x^2 + 3x - 4$	+	+	-	-	+
Γινόμενο	-	+	-	+	+

20859. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

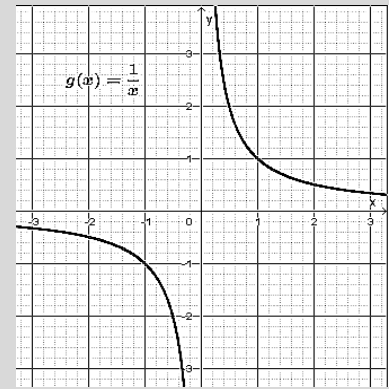
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.



Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x^3 - 4x^2 + x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x^2 - 5x + 6) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1)$ και

$(x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq 3)$. $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$.

1	-4	1	6	$\rho = -1$
	-1	5	-6	
1	-5	6	0	

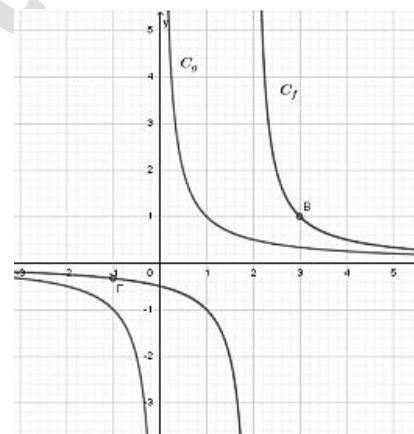
β) Επειδή $1 \in A_f$ και $-1 \notin A_f$ η f δεν είναι άρτια ή περιττή.

γ) i. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-2}$.

ii. Είναι $f(x) = g(x-2)$, οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της g κατά 2 μονάδες δεξιά.

δ) $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\frac{1}{x-2}} \right| = 1 \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2 = \pm 1 \Leftrightarrow$

$(x-2=1 \Leftrightarrow x=3)$ ή $(x-2=-1 \Leftrightarrow x=1)$.



21155. Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε.

Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

Λύση

α) Είναι $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x+2=0 \Leftrightarrow x=-2) \text{ ή } (x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατη}).$$

Επομένως το $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .

1	2	1	2	$\rho = -2$
	-2	0	-2	
1	0	1	0	

β) Είναι $P(x) = x^3 - x^2 + bx + c$. Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ όταν

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -b.$$

Οποιοδήποτε αριθμό επιλέξει ο Β για το b , ο Α επιλέγει τον αντίθετό του και εξασφαλίζει να έχει παράγοντα το $(x-1)$ το $P(x)$.

γ) Είναι $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$.

$$\text{Είναι } P(0) = -1 < 0 \text{ και } P(1) = a + b.$$

Βλέπουμε ότι οποιοδήποτε αριθμό επιλέξει ο Β για το b , ο Α έχει τη δυνατότητα να επιλέξει έναν μεγαλύτερο από τον αντίθετό του, γιατί τότε $a > -b \Leftrightarrow a + b > 0 \Leftrightarrow P(1) > 0$ και έτσι η εξίσωση θα έχει σίγουρα ρίζα στο $(0,1)$.

δ) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2022$.

Για να έχει το πολυώνυμο ρίζα το 13 θα πρέπει αυτός ο αριθμός να είναι διαιρέτης του 2022, το οποίο όμως δεν συμβαίνει. Άρα όπως και να επιλεγούν οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ρίζα τον αριθμό 13.

22013. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$.

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Λύση

α) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ αδύνατη, άρα το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$$\beta) x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1) \Leftrightarrow x^4 + 1 = x^4 + \beta x^3 + x^2 + \alpha x^3 + \alpha \beta x^2 + \alpha x + x^2 + \beta x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + 1 = x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha\beta + 2)x^2 + (\alpha + \beta)x + 1$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(-\alpha) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ -\alpha^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Αν $\alpha = \sqrt{2}$, τότε $\beta = -\sqrt{2}$ και αν $\alpha = -\sqrt{2}$ τότε $\beta = \sqrt{2}$.

$$\text{Επομένως } x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

γ) Η πρόταση είναι λάθος γιατί από το προηγούμενο σκέλος έχουμε ότι

$P(x) = x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ και γνωρίζουμε ότι το $P(x)$ δεν έχει ρίζες, καθώς και τα δύο πολυώνυμα 2ου βαθμού στα οποία παραγοντοποιήθηκε δεν έχουν ρίζες αφού έχουν διακρίνουσα $\Delta = -2 < 0$.

37475. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

γ) $\frac{1}{2} < \sin \theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

δ) $P(\sin \theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Λύση

α) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = x^2(2x-1) - (2x-1) \Leftrightarrow P(x) = (2x-1)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(2x-1) \Leftrightarrow$
 $P(x) = (x-1)(2x^2 - x + 2x - 1) = (x-1)(2x^2 + x - 1).$

β)

x	$-\infty$	-1	1/2	1	$+\infty$	
$x-1$	-	-	0	+	+	
$2x^2+x-1$	+	0	-	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	-	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

γ) $0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin \theta > \sin \theta > \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin \theta < 1$

δ) Επειδή $\sin \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $P(\sin \theta) < 0$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Θέμα 4ο

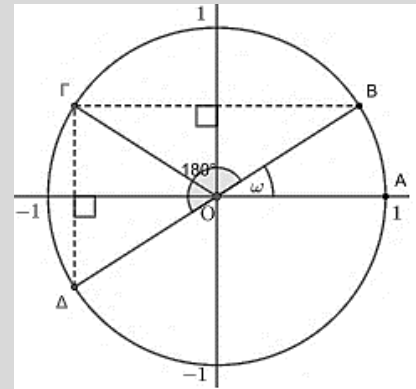
15187. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β) Να βρείτε:

- i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,
- ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,
- iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών AOB, AOG και AOD.



Λύση

α) Θέτουμε $\eta\mu\omega = x$ και η εξίσωση γράφεται: $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα.

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(5x^2 - 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } \left(5x^2 - 13x + 6 = 0, \Delta = 49, x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{5} \right)$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $0 < \eta\mu\omega < 1$, άρα $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

5	-8	-7	6	$\rho = -1$
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

β) i. Ισχύει ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$ $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα y'y και την αρχή O αντίστοιχα.

Οπότε είναι: $\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών AOB, AOG και AOD είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα, $\eta\mu\text{AOB} = \frac{3}{5}, \sigma\upsilon\nu\text{AOB} = \frac{4}{5}, \eta\mu\text{AOG} = \frac{3}{5}, \sigma\upsilon\nu\text{AOG} = -\frac{4}{5}$ και

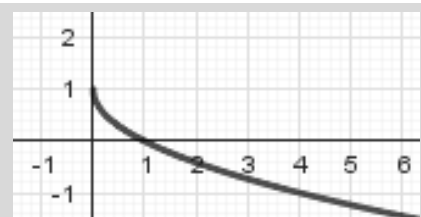
$$\eta\mu\text{AOD} = -\frac{3}{5}, \sigma\upsilon\nu\text{AOD} = -\frac{4}{5}$$

15270. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του

$$\text{γινομένου } P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1).$$



γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 0$.

β) Είναι $\alpha < \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 1 \Leftrightarrow 2f(\alpha) - 1 > 0$ και

$\beta > \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(\beta) < f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\beta) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\beta) < 1 \Leftrightarrow 2f(\beta) - 1 < 0$, άρα $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 2x$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = 2x \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \geq 0$, οπότε $x = u^2$ και η (1) γίνεται: $2u^2 + u - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $u = -1$ απορρίπτεται ή

$$u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

15377. Μία κυβική δεξαμενή A έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή B σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής B είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

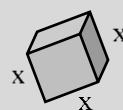
i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών A και B.

ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

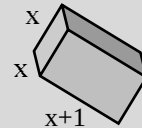
γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής B κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών A, B και Γ

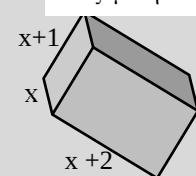
Δεξαμενή A



Δεξαμενή B



Δεξαμενή Γ



Λύση

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής A υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής B, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου,

$$V_B(x) = (x+1) \cdot x^2$$

$$\text{Είναι } \Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1) \cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2.$$

β) i. $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow (x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$ ή

$(x^2 + 4x + 12 = 0 \text{ αδύνατη γιατί έχει } \Delta < 0)$

Η διάσταση της δεξαμενής A είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής B είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων είναι $\Delta(x) = 3^2 = 9$ κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_{\Gamma}(x) = (x+1)(x+2)x$.

$$V_{\Gamma}(x) \geq 60 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)x \geq 60 \Leftrightarrow (x^2+x)(x+2) - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 6x + 20) \geq 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ έχει $\Delta < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 6x + 20 > 0$, οπότε η (1) γίνεται: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

17941. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

Λύση

α) Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$.

β) Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = -\sqrt{x+2} \quad (2).$$

Επειδή για κάθε $x \in [-2, 2]$ είναι $\sqrt{2-x} \geq 0$ και $-\sqrt{x+2} \leq 0$ η (1) αληθεύει μόνο όταν

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ -\sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ αδύνατο. Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.}$$

γ) Η g έχει πεδίο ορισμού $A = [-2, 2]$. Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$ και

$$g(-x) = \sqrt{2+(-x)} + \sqrt{-x+2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = g(x), \text{ άρα η } g \text{ είναι άρτια.}$$

δ) i. Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}$ και για κάθε $x \in [-2, 2]$, είναι:

$$(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2})^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2-x + 2\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{x+2} + x+2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{(2-x)(x+2)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ii. Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε $g(\rho) = 0$.

Επειδή η g είναι άρτια ισχύει ότι $g(-\rho) = g(\rho) = 0$, οπότε και η $x = -\rho$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

18111. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και

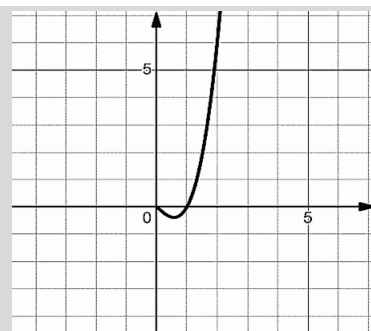
$$h(x) = x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .

iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



Λύση

α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$, άρα η h είναι περιττή.

ii. Επειδή η h είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, οπότε σχεδιάζουμε το συμμετρικό σχήμα ως προς το $(0,0)$.

$$\text{iii. } h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

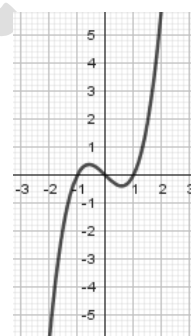
$$x = 0 \text{ ή } (x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1).$$

Η γραφική παράσταση της h τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(-1,0)$, $(0,0)$ και $(1,0)$.

β) Για $x \geq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία

$$\varepsilon: y = x \text{ όταν } g(x) > x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



18713. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

β) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2} \eta \mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

Λύση

$$\text{α) } P(1) = 2 \Leftrightarrow 2 - \alpha + 2 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2 \quad (1)$$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15, ισχύει ότι

$$P(2) = 15 \Leftrightarrow 16 - 4\alpha + 4 + \beta = 15 \Leftrightarrow \beta = 4\alpha - 5 \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $4\alpha - 5 = \alpha - 2 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και από την (1) προκύπτει ότι

$$\beta = 1 - 2 = -1. \text{ Άρα } P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1.$$

β) i. Είναι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = x^2(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 1)$, άρα το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^2 + 1 \text{ είναι παράγοντας του } P(x).$$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \right) \text{ ή } (x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ αδύνατη}).$

γ) $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2} \eta \mu^2 x \Leftrightarrow 2\sin^3 x + 2\sin x = 2 - \eta \mu^2 x \Leftrightarrow 2\sin^3 x + 2\sin x = 2 - 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow$

$2\sin^3 x - \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow P(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

20647. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

Λύση

α) Επειδή το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου, ισχύει ότι $P(2) = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta - 2\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 2\beta = -3$ (1)

Είναι $2\beta = -3 - 8\alpha \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2} - 4\alpha$.

Αν ο α είναι ακέραιος τότε ο αριθμός -4α είναι ακέραιος, οπότε ο $\beta = -\frac{3}{2} - 4\alpha$ δεν είναι ακέραιος.

Αν ο β είναι ακέραιος τότε $8\alpha + 2\beta = -3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}\beta - \frac{3}{8}$ και ο α δεν είναι ακέραιος.

Άρα τουλάχιστον ένας συντελεστής του πολυωνύμου δεν είναι ακέραιος.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - \beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε

$-24 + 2\beta = -3 \Leftrightarrow 2\beta = 21 \Leftrightarrow \beta = \frac{21}{2}$.

γ) Για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$ είναι $P(x) = -3x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 3$.

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3\right) \leq 0$ (2).

Το τριώνυμο $-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3$ έχει $\Delta = \frac{225}{4} - 36 = \frac{81}{4}$ και ρίζες

$x_1 = \frac{-\frac{15}{2} + \frac{9}{2}}{-6} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-\frac{15}{2} - \frac{9}{2}}{-6} = 2$, οπότε

$-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3 = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$ και η (2) γίνεται

$-3(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$

δ) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$

- 3	$\frac{21}{2}$	$-\frac{21}{2}$	3	$\rho = 1$
	- 3	$\frac{15}{2}$	- 3	
- 3	$\frac{15}{2}$	- 3	0	

x	$-\infty$	$1/2$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	o	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	o	+	+	+
$x-2$	-	-	-	o	+
Γινόμενο	-	o	+	o	+

$$x=1 \text{ ή } -3x^2 + \frac{15}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

$$P(\sin x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}) \text{ ή } (\sin x = 2 \text{ αδύνατη}) \text{ ή}$$

$$\left(\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

20731. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

γ) i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

α) $P(1) = 1^4 + 6 \cdot 1^2 - 7 = 1 + 6 - 7 = 0$, άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Θέτουμε $x^2 = \omega$, οπότε το $x^4 + 6x^2 - 7$ γίνεται $\omega^2 + 6\omega - 7$.

Το τελευταίο είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 64$ και ρίζες $\omega = 1$ ή $\omega = -7$, άρα

$$\omega^2 + 6\omega - 7 = (\omega - 1)(\omega + 7) \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7 = (x^2 - 1)(x^2 + 7) \quad x^4 + 6x^2 - 7, \text{ οπότε}$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 7).$$

γ) i. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1) \text{ ή } (x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -7 \text{ αδύνατη})$

ii. $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow P(2\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(2\eta\mu x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή}$$

$$(2\eta\mu x - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z})$$

20752. Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0,8, 0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1, 1)$.

α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8, 0,6)$

i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$.

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράσταση $A = \eta\mu(\pi - \omega) - 2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \omega) + \epsilon\phi(-\omega) + \sigma\phi(\pi + \omega)$.

γ) Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Κάθε σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου έχει συντεταγμένες (x, y) όπου $x = \sin \omega$ και $y = \eta \mu \omega$. Αν το Μ είχε συντεταγμένες $(1, 1)$ τότε $\sin^2 \omega + \eta \mu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα ο Φίλιππος έχει σίγουρα άδικο.

β) i. Αν $M(0,8, 0,6)$, τότε με βάση το α σκέλος είναι $\eta \mu \omega = 0,6$ και $\sin \omega = 0,8$.

ii. Είναι $\epsilon \phi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sin \omega} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ και $\sigma \phi \omega = \frac{1}{\epsilon \phi \omega} = \frac{4}{3}$. Είναι

$$A = \eta \mu(\pi - \omega) - 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega) + \epsilon \phi(-\omega) + \sigma \phi(\pi + \omega) \Leftrightarrow$$

$$A = \eta \mu \omega - 2 \eta \mu \omega - \epsilon \phi \omega + \sigma \phi \omega = -\eta \mu \omega - \epsilon \phi \omega + \sigma \phi \omega \Leftrightarrow$$

$$A = -0,6 - \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = -\frac{3}{5} - \frac{9}{12} + \frac{16}{12} = -\frac{3}{5} + \frac{7}{12} = -\frac{36}{60} + \frac{35}{60} = -\frac{1}{60}$$

$$\gamma) f(x) = 5 \sin \omega \cdot x^3 - 10 \eta \mu \omega \cdot x^2 + 5x - 3 = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x-1)(4x^2 - 2x + 3)$$

Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 - 2x + 3) < 0$ (1)

Το τριώνυμο $4x^2 - 2x + 3$ έχει $\Delta < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $4x^2 - 2x + 3 > 0$ και η (1) γίνεται $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, άρα $x \in (-\infty, 1)$.

4	-6	5	-3	$\rho=1$
	4	-2	3	
4	-2	3	0	

20759. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες.

Η ευθεία ϵ είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \hat{AOM}$ ισχύει

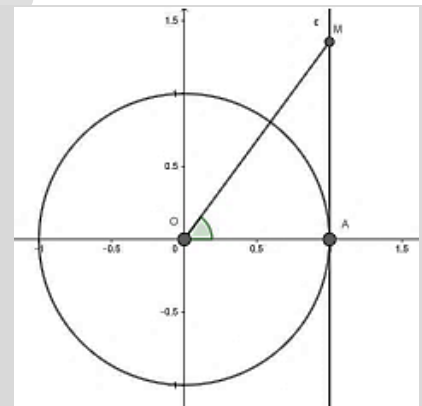
$$\epsilon \phi \omega = \frac{4}{3}, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta \mu \omega, \sin \omega, \sigma \phi \omega \text{ της γωνίας } \omega = \hat{AOM} \text{ αν ισχύει } 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \eta \mu^2 x - 5 \eta \mu \omega \cdot \eta \mu x + 5 \sin \omega \text{ και του άξονα } x'x, \text{ όπου } \omega = \hat{AOM} \text{ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και } x \in \mathbb{R}.$$



Λύση

α) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $(1, \epsilon \phi \omega)$, οπότε

$$(OAM) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OA)(AM) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \epsilon \phi \omega = \frac{4}{6} \Leftrightarrow \epsilon \phi \omega = \frac{4}{3}$$

$$\beta) \sigma \phi \omega = \frac{1}{\epsilon \phi \omega} = \frac{3}{4},$$

$$\eta \mu^2 \omega = \frac{\epsilon \phi^2 \omega}{1 + \epsilon \phi^2 \omega} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta \mu \omega = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$.

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\frac{3}{5} \text{ και επειδή } 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \text{ είναι } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}.$$

$$\gamma) f(x) = \eta\mu^2x - 5\frac{4}{5} \cdot \eta\mu x + 5 \cdot \frac{3}{5} \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu^2x - 4\eta\mu x + 3 = \eta\mu^2x - \eta\mu x - 3\eta\mu x + 3 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu x(\eta\mu x - 1) - 3(\eta\mu x - 1) = (\eta\mu x - 1)(\eta\mu x - 3)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)(\eta\mu x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left(\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή } (\eta\mu x = 3 \text{ αδύνατη}).$$

20943. Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x), \quad B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2x + 1$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

Λύση

$$\alpha) A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x) = \eta\mu^2x + (-\eta\mu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2x \Leftrightarrow$$

$$A = \eta\mu^2x + \cancel{\eta\mu^2x} + 1 - \cancel{\eta\mu^2x} = \eta\mu^2x + 1$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} + \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{\eta\mu^2x + 1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} \Leftrightarrow B = \frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{2(1 + \cancel{\sigma\upsilon\nu x})}{\eta\mu x(1 + \cancel{\sigma\upsilon\nu x})} = \frac{2}{\eta\mu x}.$$

$$\gamma) A=B \Leftrightarrow \eta\mu^2x + 1 = \frac{2}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \eta\mu^3x + \eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu^3x + \eta\mu x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } \eta\mu x = \omega \text{ και η (1) γίνεται } \omega^3 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 2) = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1) \text{ ή}$$

$$(\omega^2 + \omega + 2 = 0 \text{ αδύνατη αφού έχει } \Delta < 0).$$

$$\text{Άρα } \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

1	0	1	- 2	$\rho = 1$
	1	1	2	
1	1	2	0	

21240. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $P(1) = 3 + 4 - 5 - 2 = 0$

Με βάση το σχήμα Horner είναι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 7x + 2)$.

Το τριώνυμο $3x^2 + 7x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$

και ρίζες $x = -2$ ή $x = -\frac{1}{3}$, άρα $3x^2 + 7x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 2)$, οπότε

$P(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+2)$ και $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $\left(x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}\right)$ ή $(x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$

3	4	-5	-2	$\rho = 1$
	3	7	2	
3	7	2	0	

β) Με βάση τον παρακάτω πίνακα προσήμων είναι

$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	+	+
$3x^2 + 7x + 2$	+	+	-	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+	+

γ) Αν θέσουμε $\frac{5}{x^2+1} = \omega > 0$, έχουμε:

$3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0 \Leftrightarrow 3\omega^3 + 4\omega^2 - 5\omega - 2 > 0 \Leftrightarrow P(\omega) > 0 \Leftrightarrow$

$\omega \in \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

Όμως $\omega > 0$ άρα $\omega > 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow 5 > x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική συνάρτηση

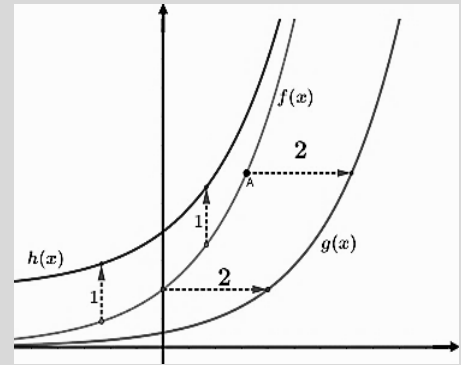
Θέμα 2ο

15393. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Επίσης, η γραφική παράσταση της $h(x)$ προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε: $g(x) = f(x - 2) = 2^{x-2}$, $h(x) = f(x) + 1 = 2^x + 1$.

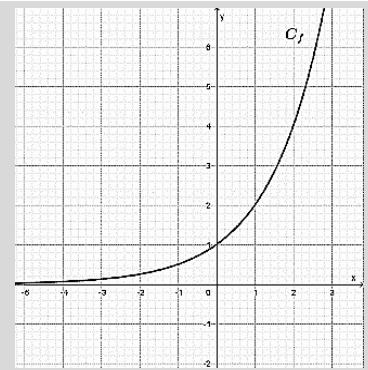
γ) Είναι $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$, άρα $A(4, 16)$.

18866. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

β) i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

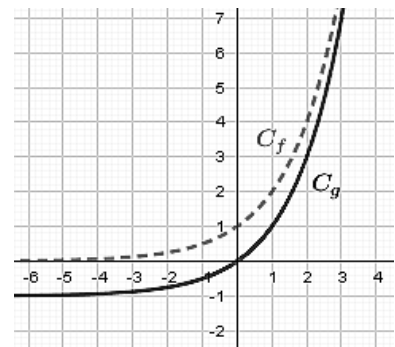


Λύση

α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

β) i. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά μονάδα προς τα κάτω.

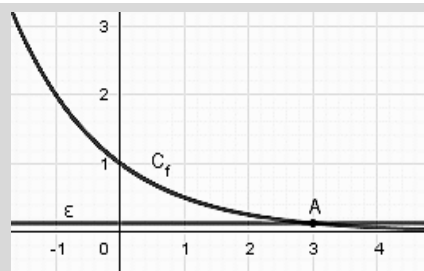
ii. Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, επομένως η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.



20855. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{1}{8}$.



β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε .

Λύση

$$20855. \alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\beta) f(x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 3. \text{ Σημείο τομής της } C_f \text{ με την } \varepsilon \text{ το } \left(3, \frac{1}{8}\right).$$

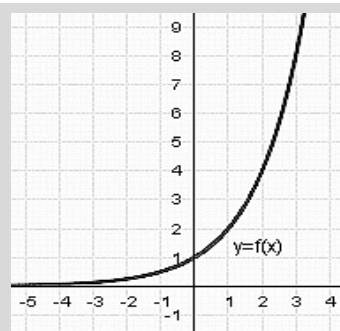
γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε όταν

$$f(x) < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow x > 3$$

21091. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

α) i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					



ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

Λύση

21091. α) i. Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ii. Επειδή η f είναι εκθετική, θα είναι της μορφής $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$.

Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$, ισχύει ότι $f(1) = 2 \Leftrightarrow a^1 = 2 \Leftrightarrow a = 2$, άρα $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta) f(x) = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5.$$

21163. Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .

β) Για $a = \frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$.

Λύση

α) Εφόσον το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι: $f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

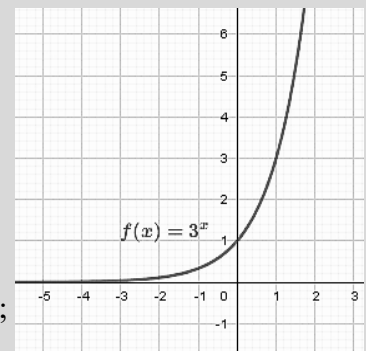
β) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι εκθετική με βάση $0 < \frac{1}{2} < 1$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, είναι $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$.

21451. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$.

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

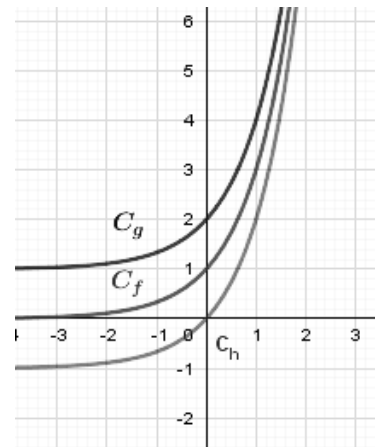
β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;



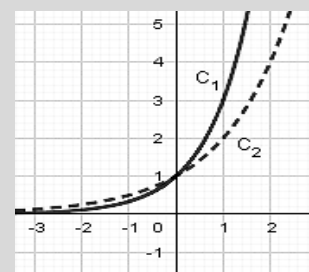
Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3^x + 1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

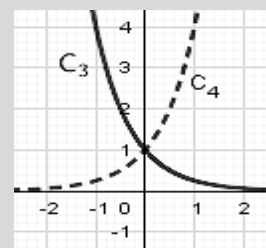
β) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 1$. Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = -1$.



21993.α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Για την f για $x = 1$ είναι $f(1) = 2^1 = 2$, δηλαδή το σημείο $(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο $(1,2)$ ανήκει στη C_2 , άρα η γραφική παράσταση της f είναι η C_2 και της g είναι η C_1 .

β) Για την φ για $x = 1$ είναι $\varphi(1) = 4^1 = 4$, δηλαδή το σημείο $(1,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της φ . Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο $(1,4)$ ανήκει στη C_4 , άρα η γραφική παράσταση της φ είναι η C_4 και της ψ είναι η C_3 .

21994. Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο.

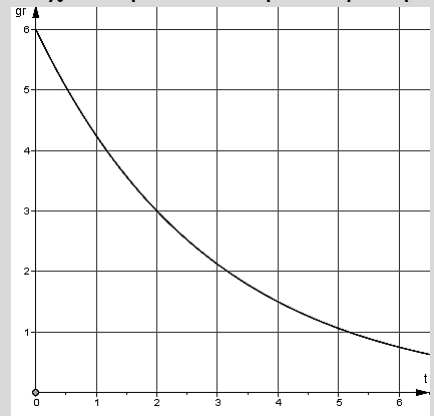
Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η 2^η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).

α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;

β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;

γ) Κατά τη διάρκεια ποιας ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1 gr;

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) 6 γραμμάρια γιατί το σημείο $(0,6)$ ανήκει στη καμπύλη της εκθετικής απόσβεσης.

β) Η ημιζωή του ραδιενεργού υλικού είναι η τιμή του χρόνου t κατά την οποία η ποσότητα του υλικού μειώνεται στο ήμισυ της αρχικής, δηλαδή γίνεται 3 γραμμάρια.

Επειδή το σημείο $(2,3)$ ανήκει στη καμπύλη, για $t = 2$ η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι 3 γραμμάρια.

γ) Το υψόμετρο της καμπύλης γίνεται μικρότερο του 1 στο χρονικό διάστημα $(5, 6)$, δηλαδή κατά τη διάρκεια της 6ης ημέρας. Άρα, κατά τη διάρκεια της 6ης ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1 gr.

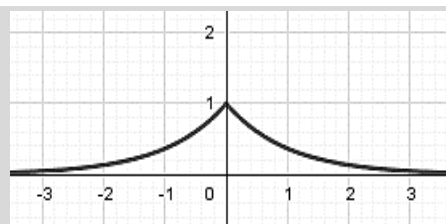
Θέμα 4ο

15269. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.

α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$A. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$B. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$



β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y = e^x$ για $x < 0$ και την $y = e^{-x}$ για $x \geq 0$, οπότε

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 για $x = 0$.

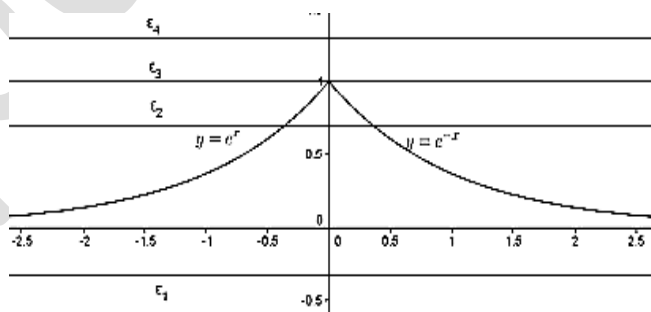
γ) Αν $\alpha \leq 0$ (ευθεία ε_1) τότε η C_f

δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = \alpha$.

Αν $0 < \alpha < 1$ (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν 2 κοινά σημεία.

Αν $\alpha = 1$ (ευθεία ε_3) έχουν ένα κοινό σημείο το $(0, 1)$.

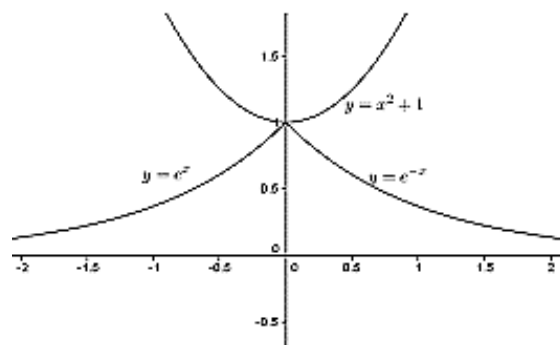
Τέλος αν $\alpha > 1$ (ευθεία ε_4) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1$

η παραβολή έχει ελάχιστο το 1 για $x = 0$.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 1 για $x = 0$ το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την παραβολή είναι το $(0, 1)$



18693. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

Λύση

$$\text{α) Η } f \text{ είναι εκθετική συνάρτηση όταν } \begin{cases} \frac{2-\lambda}{4} > 0 \\ \frac{2-\lambda}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\lambda > 0 \\ 2-\lambda \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 2 \\ \lambda \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2).$$

$$\text{β) Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα όταν } 0 < \frac{2-\lambda}{4} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2-\lambda < 4 \Leftrightarrow -2 < -\lambda < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2.$$

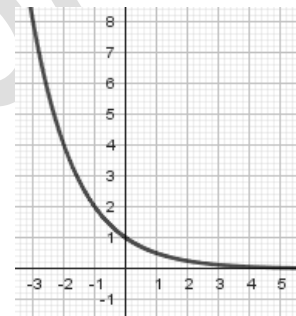
$$\text{γ) Για } \lambda = 0 \text{ είναι } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

i. σχήμα

$$\text{ii. } f(x) + f(x+1) = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 6 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 12 \Leftrightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 12 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2.$$



20642. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ ισχύει ότι $f(-1) = 2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow 2 = -f(1) \Leftrightarrow f(1) = -2$.

Είναι $-1 < 1$ και $f(-1) > f(1)$, επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = -f(x)$. Αν στη τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε $x = 0$, προκύπτει $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ άρα η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$ και επειδή

$f(x) > 0$, είναι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x < 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$ και επειδή $f(x) < 0$, είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x > 0$. Είναι $f(0) = g(0) = 0$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \neq 0$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

δ) Είναι $h(x) = f(x+2) + 1 = -2(x+2)^3 + 1, x \in \mathbb{R}$.

20689. α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Λύση

α) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
Γινόμενο	$+$	0	$-$	$+$

β) i. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι καλώς ορισμένη όταν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2$.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{\alpha-2-\alpha-1}{\alpha+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{-3}{\alpha+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \alpha+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \alpha > -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 2$.

iii. Η f είναι σταθερή όταν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1 \Leftrightarrow \alpha - 2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow -2 = 1$ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

20854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = e^{-x} = e^{|x|} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x| \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $e^{|x|} \geq e^0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 = f(0)$, άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για $x = 0$.

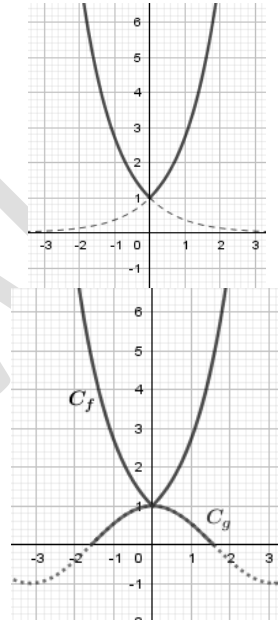
γ) Είναι $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της

$y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ για $x < 0$ και από τα σημεία της $y = e^x$ για $x \geq 0$

δ) Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $0 \leq \sin x \leq 1$, άρα $g(x) \leq 1$ και επειδή $f(x) \geq 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ αληθεύει μόνο όταν $f(x) = 1 = g(x) \Leftrightarrow x = 0$.



21444. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση

α) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Είναι $f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό

σημείο το $A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

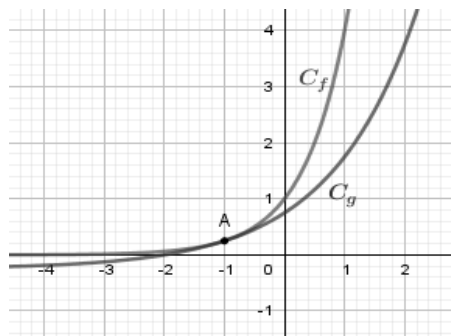
β) Είναι $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \neq \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο Α.

γ)

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

x	-2	-1	0	1
$g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$



21448. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	q_0	$q_0/2$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

Λύση

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t = 0$).

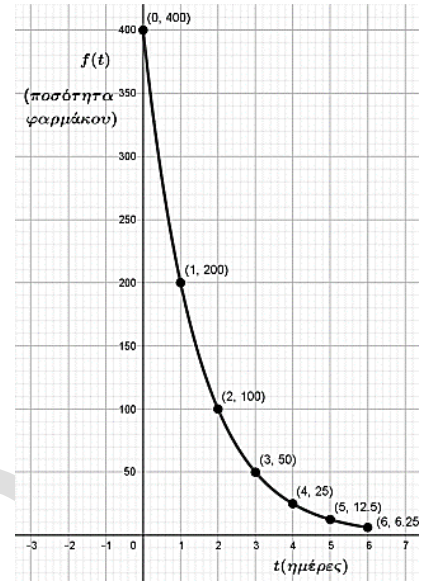
Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0 < \alpha < 1$.

β) i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή $f(1) = \frac{1}{2} q_0 \Leftrightarrow q_0 \cdot \alpha = \frac{1}{2} q_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\text{ii. } f(2) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q_0}{4}, f(2) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{q_0}{8}, f(4) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{q_0}{16},$$

$$f(5) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{q_0}{32} \text{ και } f(6) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{q_0}{64}.$$

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	q ₀	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$



γ) i. Έχουμε $f(4) = 25 \Leftrightarrow \frac{q_0}{16} = 25 \Leftrightarrow q_0 = 400 \text{ mg}.$

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0, 6]$:

21471. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha - 2\alpha + \beta - \beta = 13 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + \beta = 3 \\ \alpha = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 \\ \alpha = 5 \end{cases}.$$

β) Για $\alpha = 5$ και $\beta = -7$ είναι $f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 5 - 7 = -2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\delta) f(x) > 4^x - 3 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x - 7 > 4^x - 3 \Leftrightarrow 0 > (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4$$

Θέτουμε $2^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 4 < 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $y = 1$ ή $y = 4$, άρα

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < y < 4 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

21677. Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

$$P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}, \quad t \in [0, 40].$$

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0,7$ τότε:

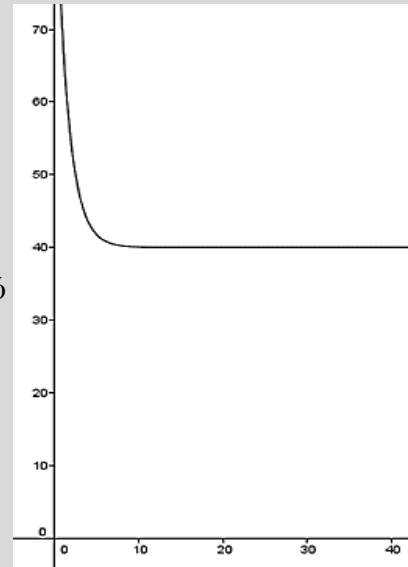
α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσιο του προβλήματος;

β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:

γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή; (Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)



Λύση

α) Είναι $P(0) = Q + (100 - Q) = 100$ άρα ο εξεταζόμενος τη χρονική στιγμή $t = 0$ θυμάται το 100% της γνώσης.

β) Στον εξεταζόμενο μένει το 50% της γνώσης, τη χρονική στιγμή t κατά την οποία

$$P(t) = 50 \Leftrightarrow 40 + (100 - 40)e^{-0,7t} = 50 \Leftrightarrow$$

$$60e^{-0,7t} = 10 \Leftrightarrow e^{-0,7t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -0,7t = \ln \frac{1}{6} \Leftrightarrow -0,7t = -\ln 6 \Leftrightarrow$$

$$-0,7t = 1,79 \Leftrightarrow t = 2,56.$$

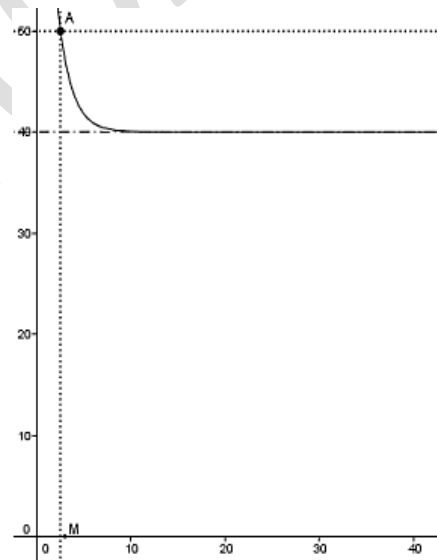
γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο A αντιστοιχεί στο 50% της γνώσης. Η τετμημένη του A είναι $t = 2,56$ και η συνάρτηση P είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε επειδή $3 > 2,56$, είναι

$P(3) < P(2,56) = 50$, οπότε μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. καθώς περνούν οι εβδομάδες ο εξεταζόμενος θυμάται όλο και λιγότερα.

δ) Είναι $P(t) = 40 + 60e^{-0,7t}$

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 60e^{-0,7t}$ καθώς το t μεγαλώνει απειρίοριστα πλησιάζει απειρίοριστα τον άξονα x 's ($y=0$).

Η γραφική παράσταση της $P(t) = 40 + 60e^{-0,7t}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = 60e^{-0,7t}$ κατά 40 προς τα πάνω, οπότε η γραφική της παράσταση θα πλησιάζει απειρίοριστα την ευθεία $y=40$ από επάνω.



21854. Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και

μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}$, $c \in \mathbb{R}$,

όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

α) Με βάση το διάγραμμα:

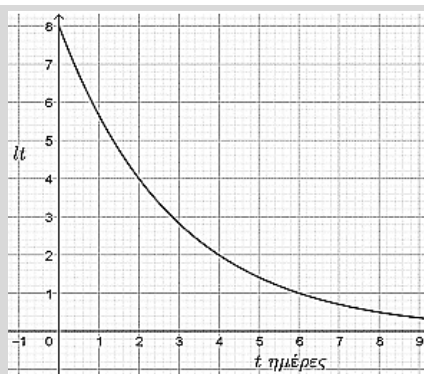
i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ii. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

iii. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο δοχείο.

β) Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

γ) Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .



Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

Λύση

α) i.

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.	8	4	2	1

ii. $Q_0 = Q(0) = 8$

iii. Η μισή ποσότητα του υγρού είναι 4 λίτρα και $Q(2) = 4$, άρα σε δύο ημέρες θα εξατμιστεί η μισή ποσότητα.

$$\beta) Q(2) = 4 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{-\frac{2}{c}} = 4 \Leftrightarrow 2^{-\frac{2}{c}} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{2}{c}} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow -\frac{2}{c} = -1 \Leftrightarrow c = 2$$

γ) Την t αν περάσουν 2 ημέρες θα είναι η $t+2$ ημέρα, τότε

$$Q(t+2) = 8 \cdot 2^{-\frac{t+2}{2}} = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}-1} = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} Q(t).$$

Άρα, μετά από δύο ημέρες, η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται στο μισό, οπότε το άλλο μισό έχει εξατμιστεί.

Θέμα 3ο

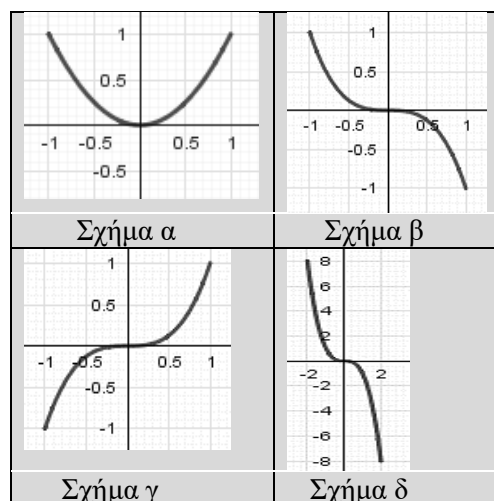
15023. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f . Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 2$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x - 1)$.

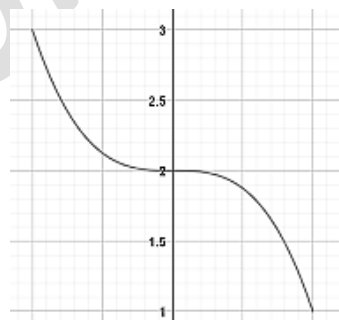
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x) = e^x - 1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x) = f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.



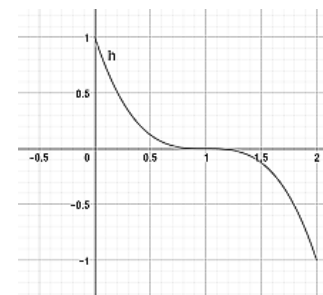
Λύση

α) Στο σχήμα α η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ οπότε είναι άρτια και όχι περιττή, οπότε δεν είναι. Στο σχήμα γ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν είναι. Στο σχήμα δ η συνάρτηση είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, αλλά έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$ και όχι το $[-1, 1]$, οπότε δεν είναι. Συνεπώς σωστή απάντηση είναι το σχήμα β.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και φαίνεται στο διπλανό σχήμα

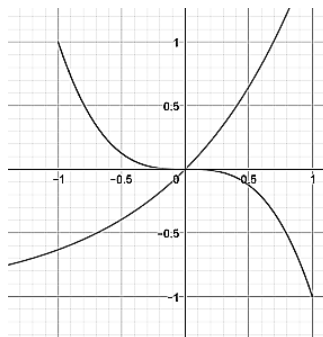


γ) Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ) Η γραφική παράσταση της s προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

Σχεδιάζοντάς την στο ίδιο σχήμα με την f βλέπουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(0, 0)$, άρα $s(x) = f(x) \Leftrightarrow x = 0$.



Λογάριθμοι

Θέμα 2ο

15687. Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

Λύση

α) $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta = A = \log_4 (3\alpha) - \log_4 \beta = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$.

β) $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta} = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 4^2 = 2$.

15816. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2, \beta = \ln 4, \gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$.

Λύση

α) $2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2\ln 4 = \ln 2 + \ln 8 \Leftrightarrow \ln 4^2 = \ln(2 \cdot 8) \Leftrightarrow \ln 16 = \ln 16$ ισχύει.

β) $\beta + \gamma = \ln 4 + \ln 8 = \ln(4 \cdot 8) = \ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2 = 5\alpha$.

15817. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

Δίνεται $e \approx 2,71$.

Λύση

α) Είναι $2 < 3$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f(2) < f(3) \Leftrightarrow \ln 2 < \ln 3 \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

β) $\beta - \alpha < 1 \Leftrightarrow \ln 3 - \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < \ln e \Leftrightarrow \frac{3}{2} < e$ ισχύει

19903. Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$.

Λύση

α) $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1 = 2 + \log(5 \cdot 2) - 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 + \log 10 = 2 + 1 = 3$.

β) $9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$.

20663. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + (4\log_2 \sqrt{2}) \cdot x^2 - (4\log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$.

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

Λύση

$$\alpha) \log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = \log_2 8 + \log_2 (\sqrt{2})^2 - 0 = \log_2 (8 \cdot 2) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$$

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$, είναι

$$v = P(2) = P(x) = 8\log_2 8 + 16\log_2 \sqrt{2} + 1990 = 8(\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2}) + 1990 \Leftrightarrow \\ v = 8 \cdot 4 + 1990 = 32 + 1990 = 2022.$$

20710. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$

γ) $10^\beta - 10^\alpha = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

Δίνεται ότι $e \approx 2,71$.

Λύση

α) $\beta + \alpha = \log 50 + \log 20 = \log (50 \cdot 20) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$.

β) $\beta + \alpha = 3 \Leftrightarrow \ln(\beta + \alpha) > \ln 3$ και $3 > e$ άρα $\ln 3 > \ln e = 1$, άρα $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

γ) $10^\beta - 10^\alpha = 10^{\log 50} - 10^{\log 20} = 50 - 20 = 30 = 10 \cdot 3 = 10(\beta + \alpha)$.

20711. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι : **i.** $\beta + \alpha > 1$. **ii.** $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε:

$$3 < 4 \Leftrightarrow \log 3 < \log 4 \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

β) i. $\beta + \alpha = \log 3 + \log 4 = \log 12 > \log 10 = 1$.

ii. Είναι $\log 3 < \log 4 \stackrel{\log 4 > \log 1 = 0}{\Leftrightarrow} \frac{\log 3}{\log 4} < 1 \Leftrightarrow \log \frac{\alpha}{\beta} < \log 1 = 0$

21676. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e}$.

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

Λύση

$$\alpha) A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e} = \ln e - \ln 5 - \ln 4 + \ln e \Leftrightarrow A = 1 - 1,609 - 1,386 + 1 = 2 - 2,995 = -0,995.$$

$$\beta) \ln 80 = \ln(5 \cdot 4^2) = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2 \ln 4 = 1,609 + 2 \cdot 1,386 = 4,381.$$

21858. Δίνεται η παράσταση $A = 2 \log 5 + 2 \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda = A$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

Λύση

$$\alpha) A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e} = \ln e - \ln 5 - \ln 4 + \ln e \Leftrightarrow A = 1 - 1,609 - 1,386 + 1 = 2 - 2,995 = -0,995.$$

$$\beta) \ln 80 = \ln(5 \cdot 4^2) = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2 \ln 4 = 1,609 + 2 \cdot 1,386 = 4,381.$$

Θέμα 4ο

15251. Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$$

$$\beta) \text{ i. Είναι } P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \text{ και}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$\text{Κάνοντας τη διαίρεση του } P(x) \text{ με το } x - 1 \text{ προκύπτει ότι } P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 6).$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 6$ έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$, οπότε

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - 2\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 2)(2x - 3), \text{ άρα}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(2x - 3) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3).$$

$$\text{ii. } P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

iii. Είναι $\ln 2 < \ln e = 1$ και

$$P(x) < 0 \text{ για } x < 1, \text{ άρα } P(\ln 2) < 0.$$

2	-9	13	-6	$\rho=1$
	2	-7	6	
2	-7	6	0	

x	$-\infty$	1	$3/2$	2	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 2$	+	o	-	-	o	+	
$2x - 3$	-	-	o	+	+	+	
P(x)	-	o	+	o	-	o	+

15474. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e) - e^2 - 4$.

Λύση

α) $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2 = ex^3 + 4x^2 \ln e^{\frac{1}{2}} + 2 \Leftrightarrow P(x) = ex^3 + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = ex^3 + 2x^2 + 2$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$P(x) = ex + 4 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 + 2 = ex + 4 \Leftrightarrow ex^3 - ex + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$ex(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1) \text{ ή}$$

$$\left(ex + 2 = 0 \Leftrightarrow ex = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{e} \right).$$

x	$-\infty$	$-e/2$	-1	1	$+\infty$		
x^2-1	+	+	o	-	o	+	
$ex+2$	-	o	+	+	+	+	
$P(x)$	-	o	+	o	-	o	+

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$$P(x) > ex + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{2}{e} \right) \cup (1, +\infty).$$

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για $x = e$, οπότε με βάση το προηγούμενο σκέλος είναι $P(e) - e^2 - 4 > 0$ αφού $e > 1$.

15591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 5} \right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

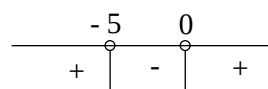
γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 14$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς όταν $\frac{\alpha}{\alpha + 5} > 0$ και $\frac{\alpha}{\alpha + 5} \neq 1$.

Είναι $\frac{\alpha}{\alpha + 5} \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha + 5$ ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και

$$\frac{\alpha}{\alpha + 5} > 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 5) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -5 \text{ ή } \alpha > 0.$$



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν

$$\frac{\alpha}{\alpha+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - \alpha - 5}{\alpha+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{\alpha+5} > 0 \Leftrightarrow \alpha + 5 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -5$$

γ) Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα είναι η -6 .

$$\text{Τότε } f(x) = \left(\frac{-6}{-6+5} \right)^x = 6^x.$$

$$f(x) + f(x+1) = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6^{x+1} = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2.$$

15822. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$ το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

Λύση

α) Είναι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$, οπότε μία ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι η $x = 0$

και οι άλλες δύο θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + 1$ που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1. Άρα οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι το 0, το 1 και το -1.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1 - \alpha$ (1).

$P(-1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow -\alpha - 1 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1$ και από τη σχέση (1) προκύπτει $\beta = 0$.

γ) i. Είναι $P(x) > 0 \Leftrightarrow -x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-
x	-	-	0	+	+
P(x)	+	0	-	0	-

ii. $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Επειδή $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ είναι $P(\log \sqrt{10}) = P\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

15823. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Λύση

α) Είναι $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$

$$P(x) = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}\right) \text{ ή } \left(3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\right)$$

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $P(x) = 1$ έχει λύσεις τις $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2}{3}$.

Είναι $\log 5 \neq \frac{1}{2}$ αφού $5 \neq 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $\log 5 \neq -\frac{1}{2}$ αφού $5 \neq 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ και $\log 5 \neq \frac{2}{3}$ αφού

$$5 \neq 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}, \text{ άρα } P(\log 5) \neq 1.$$

γ) Είναι $P(-1) = (4(-1)^2 - 1)(3(-1) - 2) + 1 = 3 \cdot (-5) + 1 = -14 < 0$ και

$$P(0) = (4 \cdot 0^2 - 1)(3 \cdot 0 - 2) + 12 + 1 = 3 > 0.$$

Αφού οι τιμές $P(-1)$ και $P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

18110. α) i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$.

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. $x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $(e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0)$,

ii. Αν $x > 0$, τότε $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, οπότε $x(e^x - 1) > 0$.

Αν $x < 0$, τότε $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, οπότε $x(e^x - 1) > 0$.

β) i. Η f ορίζεται όταν $x(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, άρα $A_f = \mathbb{R}$.

ii. $f(0) = \sqrt{0} = 0$, $f(\ln 2) = \sqrt{\ln 2(e^{\ln 2} - 1)} = \sqrt{\ln 2(2 - 1)} = \sqrt{\ln 2}$ και

$$f(-\ln 2) = \sqrt{-\ln 2(e^{-\ln 2} - 1)} = \sqrt{-\ln 2(e^{\ln 2^{-1}} - 1)} = \sqrt{-\ln 2\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \ln 2}$$

iii. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $-\ln 2 < 0$ θα είναι

$$f(-\ln 2) < f(0) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \ln 2} < 0 \text{ άτοπο.}$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επειδή $-\ln 2 < \ln 2$ θα είναι

$$f(-\ln 2) > f(\ln 2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \ln 2} > \sqrt{\ln 2} \text{ άτοπο. Επομένως η } f \text{ δεν είναι γνησίως μονότονη.}$$

18235. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

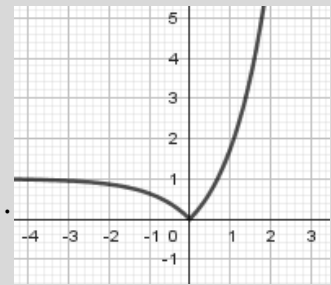
$$f(x) = |e^x - 1|, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = \alpha$.



Λύση

α) Για κάθε $x < 0$ $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, άρα $f(x) = -e^x + 1$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $e^x \geq e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$, άρα $f(x) = e^x - 1$. Επομένως $f(x) = \begin{cases} -e^x + 1, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ελάχιστο το 0 για $x = 0$.

γ) Αν $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -e^x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ δεκτή.

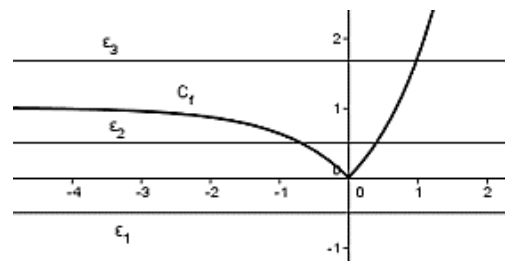
Αν $x \geq 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{3}{2}$ δεκτή.

δ) Αν $\alpha < 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.

• Αν $\alpha = 0$, τότε η C_f και η ευθεία $y = 0$ (άξονας xx') έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

• Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.

• Αν $\alpha \geq 1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα κοινό σημείο.



18429. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ($1 \text{ W} / \text{m}^2$). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db).

Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ όπου I_0 η ελάχιστη

αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100 \text{ W} / \text{m}^2$.

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

Λύση

$$\alpha) D = 10 \cdot \log\left(\frac{100}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^2 \cdot 10^{12}) = 10 \log(10^{14}) \Leftrightarrow D = 10 \cdot 14 = 140 \text{ Db}.$$

$$\beta) D_2 - D_1 = 20 \Leftrightarrow 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 20 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{\frac{I_2}{10^{-12}}}{\frac{I_1}{10^{-12}}}\right) = 2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2 \Leftrightarrow I_2 = 100 I_1.$$

$$\gamma) 120 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow 12 = \log(I \cdot 10^{12}) \Leftrightarrow 10^{12} = 10^{12} I \Leftrightarrow I = 1 \text{ W} / \text{m}^2.$$

18434. Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λπ.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4 \text{ m}^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10 m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξετε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

Λύση

α) Επειδή $I_0 > 0$, $e^{-\lambda h} > 0$ για κάθε h , είναι $I > 0$, οπότε δεν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

$$\beta) \text{Θέλουμε } I \leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow I_0 \cdot e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\lambda h \leq \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\lambda h \leq -\ln 4 \Leftrightarrow h \geq \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{\ln 2^2}{1,4 \text{ m}^{-1}} = \frac{2 \cdot 0,7}{1,4} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

Άρα σε βάθος τουλάχιστον ενός μέτρου δεν υπάρχει η συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής.

γ) Για το συγκεκριμένο μέσο έχουμε ότι για $h = 10 \text{ m}$ είναι

$$I = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow I_0 \cdot e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (e^{-\lambda})^{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{10}}, \text{ άρα}$$

$$I = I_0 \cdot e^{-\lambda h} = I_0 \cdot (e^{-\lambda})^h = I_0 \cdot \left(2^{-\frac{1}{10}}\right)^h = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}.$$

18437. Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576, \text{ με } f(x) \geq 0,$$

όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

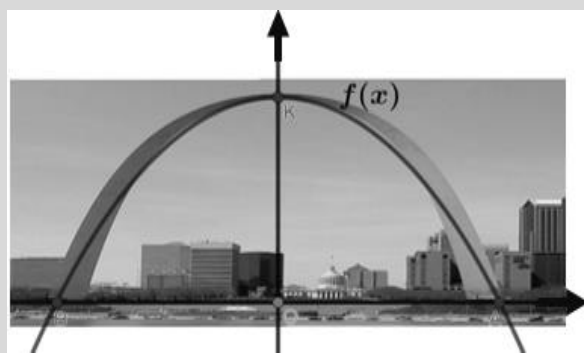
(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος OK της αψίδας είναι 192 m.

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A στο οποίο η καμπύλη τέμνει

τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $\ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \cong 0,96$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της OK.



Λύση

α) Το ύψος (OK) είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα y' y η γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή ο αριθμός: $f(x) = -192(e^0 + e^0) + 576 = 576 - 384 = 192\text{m}$.

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα x' x, είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) = -576 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{100}}} = 3 \quad (1)$$

Θέτουμε $e^{\frac{x}{100}} = \omega$. Είναι $x > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{100} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} > e^0 = 1 \Leftrightarrow \omega > 1$ και η (1) γίνεται

$$\omega + \frac{1}{\omega} = 3 \Leftrightarrow \omega^2 + 1 = 3\omega \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega + 1 = 0.$$

$$\Delta = 5, \omega = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ δεκτή ή } \omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\text{Άρα } e^{\frac{x}{100}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \Leftrightarrow x = 100 \ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \cong 100 \cdot 0,96 = 96\text{m}.$$

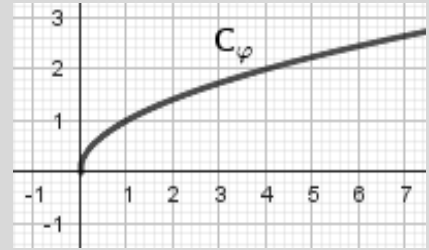
γ) Το σημείο B έχει τετμημένη -96, άρα θα είναι $(AB) = 96 \cdot 2 = 192\text{ m} = (OK)$.

18863. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και

$$g(x) = \frac{x+1}{3}, x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.

Λύση

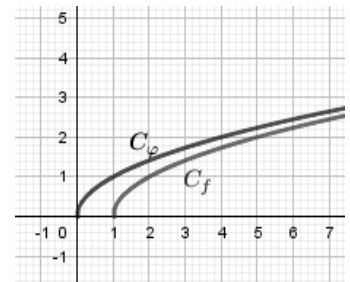
α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Για κάθε } x \geq 1 \text{ είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow x-1 = \frac{(x+1)^2}{9} \Leftrightarrow$$

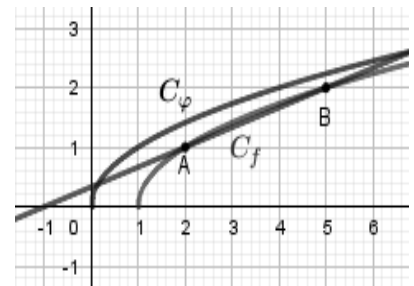
$$9x - 9 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 5$$

Είναι $f(2) = 1 = g(2)$, $f(5) = 2 = g(5)$, οπότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $(2,1)$ και $(5,2)$.

β) i. Επειδή $f(x) = \varphi(x-1)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.



ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία $A(2,1)$ και $B(5,2)$, τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x \in (2,5)$.

δ) Είναι $e^2 < 10 < e^3 \Leftrightarrow 2 < \ln 10 < 3$, άρα $\ln 10 \in (2,5)$, οπότε

$$f(\ln 10) > g(\ln 10) \Leftrightarrow \sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}.$$

20657. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ , σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t , σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100°C και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30°C . Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του

αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C .

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0,0672$.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$.

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0,034$.

Λύση

α) Η αρχική θερμοκρασία του σώματος πριν το αφήσουμε να κρυώσει είναι $\theta_0 = 100^{\circ}\text{C}$.

Επειδή 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C , ισχύει ότι $\theta(5) = 80 \Leftrightarrow 80 = 30 + (100 - 30)e^{5k} \Leftrightarrow 50 = 70e^{5k} \Leftrightarrow$

$$e^{5k} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = \ln \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = -0,336 \Leftrightarrow k = -\frac{0,336}{5} = -0,0672.$$

β) Από το προηγούμενο σκέλος είναι $e^{5k} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow (e^k)^5 = \frac{5}{7} \Leftrightarrow e^k = \sqrt[5]{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$, οπότε

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)(e^k)^t = 30 + (100 - 30)\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^t = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

γ) Επειδή $1\text{h}40\text{min} = 100\text{min}$, είναι $\theta(100) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{100}{5}} = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{20} = 30 + 70\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\theta(100) \cong 30 + 70(0,034)^2 = 30 + 70 \cdot 0,001156 = 30 + 0,08092 \cong 30,08^{\circ}\text{C}$$

20669.α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

Λύση

α) i. Για κάθε $x < 0$ είναι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x$ ισχύει γιατί $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ και $x < 0$.

ii. 1ος τρόπος: Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f(x) > 0$ από το προηγούμενο σκέλος.

Αν $x \geq 0$, τότε $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2$ ισχύει

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\beta) \text{ i. } g(-x) + g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \Leftrightarrow$$

$$g(-x) + g(x) = \ln\left[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)\right] \Leftrightarrow$$

$$g(-x) + g(x) = \ln\left[(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2\right] = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0.$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R} = A_g$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow g(-x) = -g(x)$, άρα η g είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

20845. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

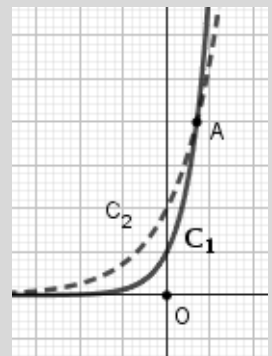
β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2

με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και

$k(x) = e^{2x}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A ;



Λύση

$$\alpha) f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1) \Leftrightarrow e^k - 1 \geq 1 - e^{-k} \Leftrightarrow e^k + \frac{1}{e^k} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^k)^2 + 1 - 2e^k \geq 0 \Leftrightarrow (e^k - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Η ισότητα ισχύει όταν } (e^k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^k - 1 = 0 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \text{ είναι } kx_1 < kx_2 \Leftrightarrow e^{kx_1} < e^{kx_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \text{ i. } e^{2x} > 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) > 0 \xrightarrow{e^x > 0} e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2.$$

ii. Επειδή για κάθε $x > \ln 2$ είναι $e^{2x} > 2e^x$ και στο σχήμα μετά το σημείο A που είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δύο καμπυλών, η C_1 είναι πάνω από τη C_2 , η C_1 είναι η γραφική παράσταση της $k(x) = e^{2x}$ και η C_2 της $\varphi(x) = 2e^x$.

Η τετμημένη του A είναι $x = \ln 2$, τότε $\varphi(\ln 2) = 2e^x = 2e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4 = k(\ln 2)$, άρα $A(\ln 2, 4)$.

20847. Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο: $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα

αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$).

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριοθούμενο	140 ντεσιμπέλ

Λύση

α) Από τον πίνακα φαίνεται ότι $\Delta = 10$. Άρα έχουμε:

$$10 = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow \log(10^{12} \cdot I) = 1 \Leftrightarrow 10^{12} \cdot I = 10 \Leftrightarrow I = \frac{10}{10^{12}} = 10^{-11}.$$

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι 10^{-11} W/m^2 .

β) Για $I = 1$ είναι $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 1) = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν η αρχική ένταση I διπλασιαστεί και γίνει $2I$, τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D' γίνεται:

$$D' = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2I) = 10(\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)) = 10(\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)) \Leftrightarrow D' = 10 \log 2 + 10 \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow$$

$$D' = 10 \cdot 0,3 + D = 3 + D. \text{ Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.}$$

Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 2ο

15267. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Λύση

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 10 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 30 - \log 6 \Leftrightarrow$$

$$\log(x^2 + 1) = \log \frac{30}{6} \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5.$$

β) $\log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

15617. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

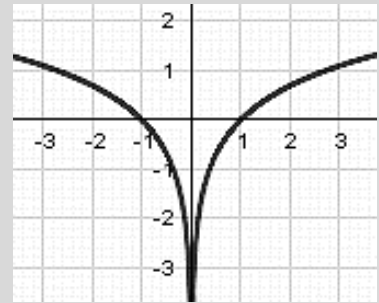
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln|x|$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των

$f, g(x) = \ln(x), x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.



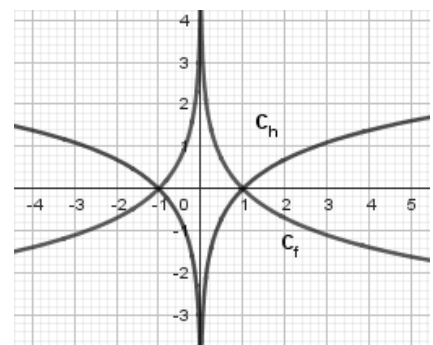
Λύση

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = \ln 1 - \ln|x| = -\ln|x|$.

β) i. Επειδή $f(x) = -h(x)$, η γραφική παράσταση της f είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της h ως προς τον άξονα $x'x$.

ii. Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) < 0$, $h(x) > 0$, οπότε $f(x) < h(x)$ και δεν έχουν κοινά σημεία στο $(1, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) > 0$, $h(x) < 0$, οπότε $f(x) > h(x)$ και δεν έχουν κοινά σημεία στο $(0, 1)$. Επομένως μοναδικό κοινό τους σημείο στο $(0, +\infty)$ μόνο για $x = 1$.



15675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

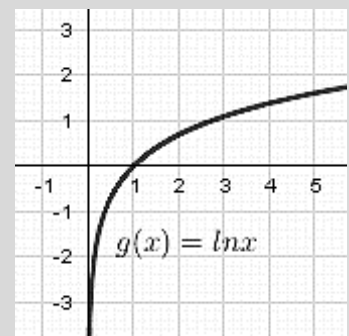
15808. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.

Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

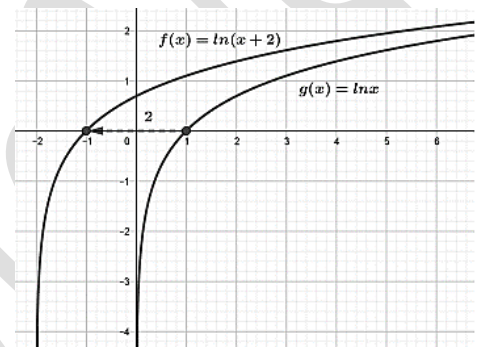


Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, άρα $A_f = (-2, +\infty)$.

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$. Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(-1, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



17318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

Λύση

α) $f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = \ln 6$

β) $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 3 + \ln 2^3 - \ln 6 = \ln(3 \cdot 8) - \ln 6 = \ln\left(\frac{24}{6}\right) = \ln 4$.

γ) $f(x) = \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = \ln 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 8$ και ρίζες $x = 1 - \sqrt{2}$ ή $x = 1 + \sqrt{2}$.

19908. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, άρα $A_f = (0, 1)$.

$$\beta) f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

20635. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, άρα $A_f = (-1, +\infty)$.

β) Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ αν και μόνο αν $f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$ ισχύει.

γ) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$ δεκτή.

20692. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$.

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

Λύση

α) $f(100) = \log 100 = \log 10^2 = 2$, $f(\sqrt{10}) = \log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

β) $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5 \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(x-1) = \log \frac{10}{5} \Leftrightarrow$

$\log[(x+1)(x-1)] = \log 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$. $x > 1$

20725. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$.

ii. $g(x) = 2f(x)$.

Λύση

α) Είναι $A_f = (0, +\infty)$. Η g ορίζεται όταν $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, άρα $A_g = (-2, +\infty)$.

β) i. $f(x) = 2 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$.

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g(x) = 2f(x) \Leftrightarrow \log(x+2) = 2\log x \Leftrightarrow \log(x+2) = \log x^2 \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 8$ και ρίζες $x = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1+\sqrt{2} > 0$ δεκτή

ή $x = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} < 0$ απορρίπτεται.

20727. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x = 3$.

ii. $\ln(x-1) = 1$.

Λύση

α) Είναι $A_f = (0, +\infty)$. Η g ορίζεται όταν $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $A_g = (1, +\infty)$.

β) i. $\log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$

ii. $\ln(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = e \Leftrightarrow x = e+1$

20729. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

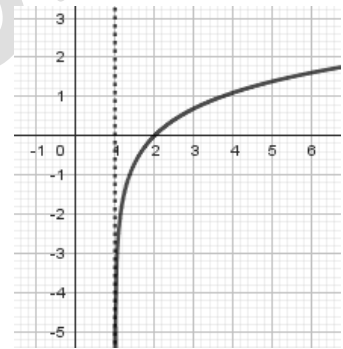
Λύση

20729.α) Η f ορίζεται όταν $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $A_f = (1, +\infty)$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(1,0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



20730. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln(x^2+1)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, άρα $A_f = (-\infty, 1)$.

β) Για κάθε $x < 1$ είναι: $\ln(1-x) = \ln(x^2+1) \Leftrightarrow 1-x = x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow$
 $x=0$ δεκτή ή $(x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ δεκτή).

20851. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 2\log 6 - \log 12$ και $B = \log 5 + \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

Λύση

α) $A = 2\log 6 - \log 12 = \log 6^2 - \log 12 = \log \frac{36}{12} = \log 3$, $B = \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$.

β) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $3 < 10$, είναι $\log 3 < \log 10 \Leftrightarrow A < B$.

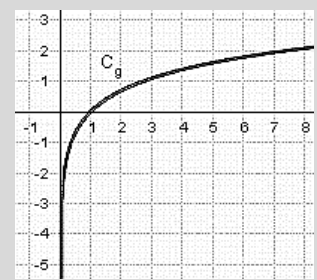
γ) $\log x < 1 \Leftrightarrow \log x < \log 10 \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

20853. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

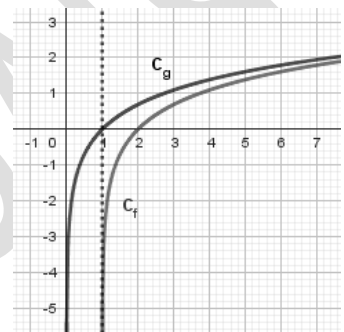


Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $A_f = (1, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 1 μονάδα δεξιά.

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ για $x > 2$.



21174. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log \frac{1}{2} - \log(1-x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \\ 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$, άρα $A_f = (-1, 1)$.

β) Είναι $\log(x+1) = \log \frac{1}{2} - \log(1-x) \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(1-x) = \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\log[(x+1) \cdot (1-x)] = \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1) \cdot (1-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ή } \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ οι}$$

οποίες είναι δεκτές.

21449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

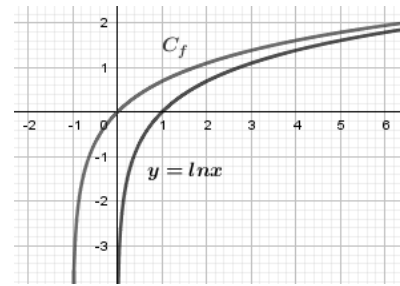
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, άρα $A_f = (-1, +\infty)$.

β) Είναι $f(0) = \ln 1 = 0$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



21450. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^2 + 4 > 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ δεκτή.

21472.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

Λύση

α) Πρέπει $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Είναι $\ln(x+1) = \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln(x+1) > \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 > 2x \Leftrightarrow x < 1$, οπότε $x \in (0, 1)$.

21473.α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$.

Λύση

α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$\begin{cases} x+6 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7 \Leftrightarrow \ln[x(x+6)] = \ln 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 64$ και ρίζες $x = 1$ δεκτή, $x = -7$ που απορρίπτεται.

21675. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Λύση

α) $1 - \log 2 = \log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2} = \log 5.$

β) $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

21952. Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$.

Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}.$

β) $0 < \ln A < 1.$

Δίνεται $e \approx 2.71$.

Λύση

α) $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100} = \ln(e)^{\frac{1}{2}} + \log(100)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log 10^2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}.$

β) $0 < \ln A < 1 \Leftrightarrow \ln 1 < \ln \frac{7}{6} < \ln e \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{7}{6} < e \text{ ισχύει.}$

21953. Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7.$

β) $0 < \log A < 1.$

Λύση

α) $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}} = 2 + 10^{\log(\sqrt{5})^2} = 2 + 10^{\log 5} = 2 + 5 = 7$

β) $0 < \log A < 1 \Leftrightarrow 0 < \log 7 < 1 \Leftrightarrow \log 1 < \log 7 < \log 10 \stackrel{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} 1 < 7 < 10 \text{ ισχύει.}$

21954. Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

ii. $A = 1.$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A.$

Λύση

α) i. $\log 10^{10} = 10$ ισχύει από την ιδιότητα $\log_a a^x = x, a > 0 \text{ με } a \neq 1, x > 0$

ii. $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10}) = \ln 1 + \log 10 = 0 + 1 = 1$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\log(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

21956. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

Λύση

$$\alpha) A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20 = \log 5^2 + \log 2^3 - \log 20 \Leftrightarrow A = \log(25 \cdot 8) - \log 20 \Leftrightarrow$$

$$A = \log \frac{200}{20} = \log 10 = 1.$$

$$\beta) \text{ Αρχικά πρέπει } e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\ln(e^x - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = e \Leftrightarrow e^x = e + 1 \Leftrightarrow x = \ln(e + 1).$$

Θέμα 4ο

15015. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.

Λύση

$$\alpha) P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ή }$$

$$\left(x^2 - x - 2 = 0, \Delta = 1 + 8 = 9, x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \right)$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow P(\ln x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } (\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2) \text{ ή }$$

$$\left(\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \right)$$

ω	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
ω	-	-	ϕ	+	+
$\omega^2 - \omega - 2$	+	ϕ	-	-	+
$P(\omega)$	-	ϕ	+	ϕ	+

γ) Θέτουμε $\ln x = \omega$ και η ανίσωση γίνεται

$$\omega^3 - \omega^2 - 2\omega > 0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2 - \omega - 2) > 0 \Leftrightarrow P(\omega) > 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 0 \text{ ή } \omega > 2$$

$$\text{Άρα } \left(-1 < \ln x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < 1 \right) \text{ ή } \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2 \text{ δεκτές}$$

15021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

Είναι $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

$$\gamma) f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = f(\ln 2) + f(\ln 2^{-1}) = f(\ln 2) + f(-\ln 2) = f(\ln 2) - f(\ln 2) = 0.$$

$$\delta) \text{ Για κάθε } \theta \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(\eta\mu\theta) + f(-\eta\mu\theta) = f(\eta\mu\theta) - f(\eta\mu\theta) = 0.$$

15093. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > \log 1 \Leftrightarrow 10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow \log 10^x > \log 2 \Leftrightarrow x > \log 2$

$$\gamma) \log(10^{2x} - 10^x) = \log[10^x(10^x - 1)] = \log 10^x + \log(10^x - 1) = x + f(x)$$

δ) Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f με την $y = -x$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = \log 1 \Leftrightarrow$

$$10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^{2x} - 10^x - 1 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $10^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 5$ και ρίζες $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ που απορρίπτεται.

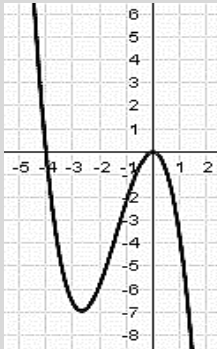
$$\text{Άρα } 10^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log 10^x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\text{Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες } \left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), -\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

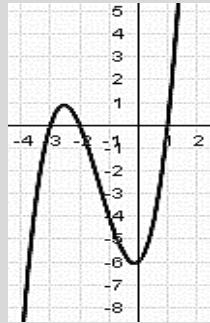
15678. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

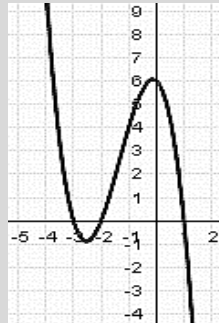
β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



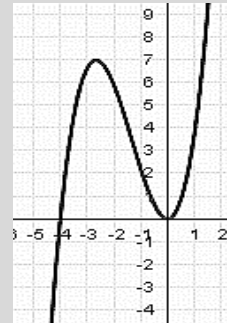
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $P(1) = 0$, οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1.

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$$P(x) = (x-1)(-x^2 - 5x - 6) = -(x-1)(x^2 + 5x + 6)$$

Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες -2, -3, άρα $P(x) = -(x-1)(x+2)(x+3)$

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow$$

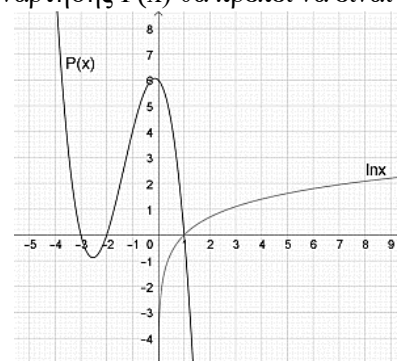
$$(x-1)(x+2)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty).$$

-1	-4	-1	6	$\rho=1$
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	-	0	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$, οπότε το μόνο σχήμα που το ικανοποιεί είναι το γ.

γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



15679. Δίνεται η παράσταση $A = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

Λύση

$$\alpha) \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0 \Leftrightarrow (\omega^2 - 1)(\omega - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 < \omega < 1 \text{ ή } \omega > 3.$$

ω	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$\omega - 1$	-	-	0	+	+
$\omega + 1$	-	0	+	+	+
$\omega - 3$	-	-	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

β) Η παράσταση Α ορίζεται όταν

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0 \text{ και αν θέσουμε } e^x = \omega \text{ είναι } \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 1 \text{ ή } \omega > 3.$$

Άρα $(-1 < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0)$ ή $(e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3)$.

$$\gamma) A = -\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right) = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - 3 = e^x - 3 \Leftrightarrow 3e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x}(3e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \text{ αδύνατη ή}$$

$$3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3.$$

15688. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + a$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A = (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι: $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x-1} \Leftrightarrow$

$$e^x - 1 - \frac{e^x}{e} = 0 \Leftrightarrow e \cdot e^x - e - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e - 1) = e \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{e-1}.$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι: $f(x) = x + a \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x + a \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x+a} \Leftrightarrow e^x - 1 - e^x e^a = 0 \Leftrightarrow$

$$e^x(1 - e^a) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{1 - e^a} \text{ αδύνατη γιατί για } a > 0 \text{ είναι } e^a > 1 \Leftrightarrow 1 - e^a < 0 \text{ και } e^x > 0.$$

15690. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

Λύση

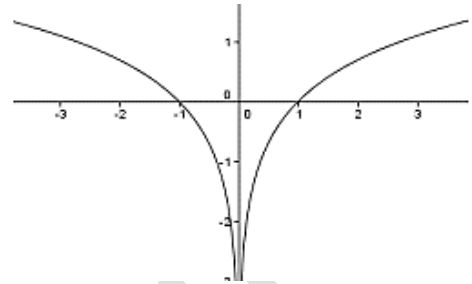
α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.

Επειδή $A_f = \mathbb{R}^*$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

Είναι $f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 \neq \ln x = \ln x$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία

$$y = 2, \text{ όταν } f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln |x|^2 < 2 \Leftrightarrow \ln |x| < 2 \Leftrightarrow$$

$|x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$. Όμως $x \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \ln 2$ για $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.

15694. Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12}$ km.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d .

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $0,46$ και απόλυτο μέγεθος $-5,14$.

Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

Λύση

α) Θέλουμε να είναι $m < M \Leftrightarrow m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) < 0 \Leftrightarrow \log \left(\frac{d}{10} \right) < 0 = \log 1 \Leftrightarrow \frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$

β) $m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) \Leftrightarrow m - 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) = M \Leftrightarrow M = 1,157 - 5 \log \left(\frac{100}{10} \right) \Leftrightarrow$
 $M = 1,157 - 5 \log 10 = 1,157 - 5 = -3,843$.

γ) $m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) \Leftrightarrow \log \left(\frac{d}{10} \right) = \frac{m - M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m - M}{5}} \Leftrightarrow d = 10 \cdot 10^{\frac{m - M}{5}} = 10^{1 + \frac{m - M}{5}} = 10^{\frac{5 + m - M}{5}}$.

δ) $d = 10^{\frac{5 + 0,46 + 5,14}{5}} = 10^{\frac{10,6}{5}} = 10^{2,12} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$ parsec.

16001. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

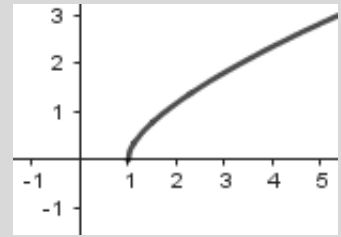
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.



Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα $A_f = [1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα $A_g = [1, +\infty)$.

β) Είναι $f(x) - g(x) = \sqrt{x \ln x} - \sqrt{\ln x} = \sqrt{x} \sqrt{\ln x} - \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln x} (\sqrt{x} - 1)$

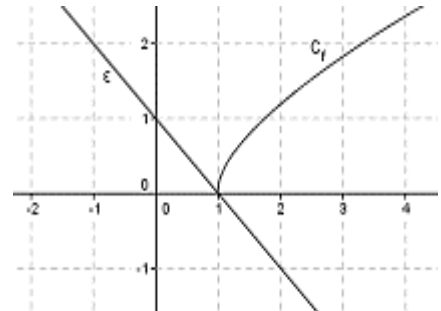
Επειδή $x \geq 1$, είναι $\sqrt{\ln x} \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \geq 0$, άρα $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

γ) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Είναι $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25}{15} - \frac{21}{15} = \frac{4}{15} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} > \frac{7}{5} \xrightarrow{f \text{ αυξ}} f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1, 0)$.

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.



18865. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

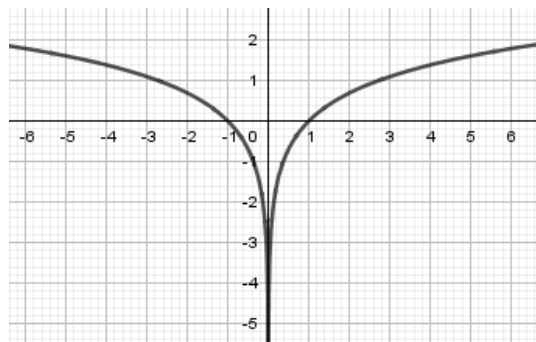
δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1, 0)$, $B(x, 0)$ και $\Gamma(x, \ln x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$ και $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της f από τελείται από τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$ και από τη συμμετρική της ως προς τον $y'y$, την $y = \ln(-x)$, $x < 0$.



δ) Αν $x > 1$, τότε

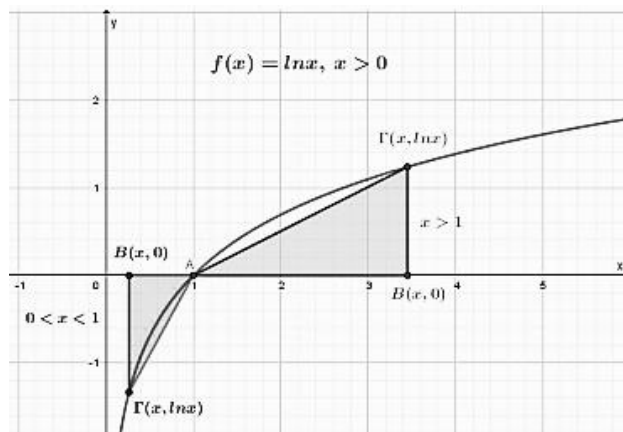
$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x.$$

Αν $0 < x < 1$, τότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(1-x)(-\ln x) \Leftrightarrow$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x.$$

Άρα $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.



20857. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

δ) Αν $P(\ln \kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

Λύση

α) Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ είναι

$$P(3) = 0 \Leftrightarrow 3^3 - \alpha \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 - \beta = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\alpha + 21 - \beta = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 48 \quad (1)$$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $v = -16$, ισχύει ότι

$$P(-1) = -16 \Leftrightarrow -1 - \alpha - 7 - \beta = -16 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = -8 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $8\alpha = 40 \Leftrightarrow \alpha = 5$

και από την (1) $45 + \beta = 48 \Leftrightarrow \beta = 3$.

1	-5	7	-3	$\rho=1$
	1	-4	3	
1	-4	3	0	

β) Είναι $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ ή } (x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3).$$

γ) $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$

δ) $P(\ln \kappa) < 0 \Leftrightarrow (\ln \kappa < 1 \Leftrightarrow \kappa < e) \text{ ή } (1 < \ln \kappa < 3 \Leftrightarrow e < \kappa < e^3).$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	ϕ	+	+
$x^2 - 4x + 3$	+	ϕ	-	+
Γινόμενο	-	ϕ	-	+

21445. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0 \Leftrightarrow (4^x - 1)(2^x + 5) > 0 \Leftrightarrow 4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(4^x - 1) = 3(2^x + 5) \Leftrightarrow$
 $7 \cdot (2^x)^2 - 7 = 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 = 0$.

Θέτουμε $2^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $7y^2 - 3y - 22 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 625$ και ρίζες

$y = 2$ ή $y = -\frac{11}{7}$ που απορρίπτεται. Άρα $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

γ) $f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(4^x - 1) > 3(2^x + 5) \Leftrightarrow$
 $7 \cdot (2^x)^2 - 7 > 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 > 0 \Leftrightarrow 7y^2 - 3y - 22 > 0 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{7}$ αδύνατο ή $y > 2 \Leftrightarrow$
 $2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

21446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$, άρα $A_f = (\ln 2, +\infty)$.

β) $f(x) + x = 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln[e^x(e^x - 2)] = \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x = 8 \Leftrightarrow$
 $(e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 2y - 8 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $y = 4$ ή $y = -2$ απορρίπτεται.

Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ δεκτή.

γ) $f(x) + x \geq 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln[e^x(e^x - 2)] \geq \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x \geq 8 \Leftrightarrow$
 $(e^x)^2 - 2e^x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -2$ αδύνατο ή $y \geq 4 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$.

21447. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Λύση

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0) = 200e^{c \cdot 0} = 200$ βακτήρια.

β) Έχουμε: $P(1) = 328 \Leftrightarrow 200e^c = 328 \Leftrightarrow e^c = \frac{328}{200} = 1,64 \Leftrightarrow c = \ln 1,64 \cong 0,5$.

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή $10P(0) < P(t) < 100P(0) \Leftrightarrow$

$$10 \cdot 200 < 200e^{\frac{1}{2}t} < 100 \cdot 200 \Leftrightarrow 10 < e^{\frac{1}{2}t} < 100 \Leftrightarrow \ln 10 < \frac{1}{2}t < \ln 100 \Leftrightarrow$$

$$2\ln 10 < t < 2\ln 10^2 \Leftrightarrow 2\ln 10 < t < 4\ln 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2,3 < t < 4 \cdot 2,3 \Leftrightarrow 4,6 < t < 9,2.$$

21470. Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t$.

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, οπότε

$$Q(2) = \frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{2t} = \frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow (e^t)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^t = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Είναι } Q(t) = Q_0 e^{ct} = Q_0 (e^t)^c = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t.$$

β) $Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}Q_0 = 1 \Leftrightarrow Q_0 = 9$ κιλά

γ) $Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^2 \left(3^{-\frac{1}{2}} \right)^t = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^{-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$

$$6 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

21474. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

(Δίνεται ότι: $\log(0,5) = -0,3$ και $\log(0,85) = -0,07$).

Λύση

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1ης εβδομάδας είναι: $10 - \frac{15}{100} \cdot 10 = 10 - 1,5 = 8,5$

λίτρα.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2ης εβδομάδας είναι:

$$8,5 - \frac{15}{100} \cdot 8,5 = 8,5(1 - 0,15) = 8,5 \cdot 0,85 = 7,225 \text{ λίτρα.}$$

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t = 0$) είναι 10 λίτρα, οπότε $V(0) = V_0 \cdot \alpha^0 = 10 \Leftrightarrow V_0 = 10$.

Είναι $V(1) = 8,5 \Leftrightarrow 10 \cdot \alpha = 8,5 \Leftrightarrow \alpha = 0,85$.

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$$V(t) < \frac{1}{2} V_0 \Leftrightarrow 10(0,85)^t < \frac{10}{2} \Leftrightarrow (0,85)^t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log(0,85)^t < \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$t \log(0,85) < -0,3 \Leftrightarrow -0,07t < -0,3 \Leftrightarrow t > \frac{0,3}{0,07} = \frac{30}{7}$$

Αρα μετά από εβδομάδες $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

21678. Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά.

Να βρείτε την ηλικία του οστού.

Λύση

α) Είναι $Q(t') = \frac{1}{2}Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{ct'} = \frac{1}{2}Q_0 \Leftrightarrow e^{ct'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = -\ln 2 \Leftrightarrow t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

β) Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 ισχύει $t' = 5730$, οπότε έχουμε

$$-\frac{\ln 2}{c} = 5730 \Leftrightarrow 5730c = -\ln 2 \Leftrightarrow c = -\frac{\ln 2}{5730}, \text{ οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα}$$

-14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$.

γ) Είναι $Q(t) = \frac{25}{100}Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4}Q_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730}t = \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
 $-\frac{\ln 2}{5730}t = -\ln 4 \Leftrightarrow \ln 2 \cdot t = 5730 \cdot \ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 2 \cdot t = 11460 \ln 2 \Leftrightarrow t = 11460$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων.

21679. Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρετε, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$.

Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_a + ce^{-\kappa t}$ όπου c, κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$.

Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$

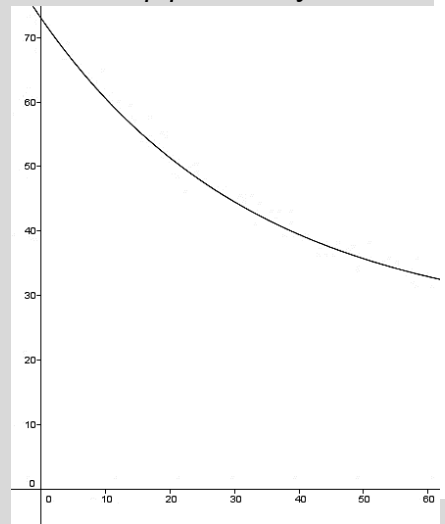
β) Να βρείτε την σταθερά κ .

(Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.



Λύση

α) Είναι $T(0) = T_a + ce^0 \Leftrightarrow 73 = 25 + c \Leftrightarrow c = 48$.

β) Είναι $T(10) = 61 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-10\kappa} = 61 \Leftrightarrow 48e^{-10\kappa} = 36 \Leftrightarrow e^{-10\kappa} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$-10\kappa = \ln \frac{3}{4} \Leftrightarrow -10\kappa = \ln 0,75 \Leftrightarrow -10\kappa = -0,3 \Leftrightarrow \kappa = 0,03.$$

γ) $T(40) = 25 + 48e^{-0,03 \cdot 40} = 25 + 48e^{-1,2} = 25 + 48 \cdot 0,3 = 25 + 14,4 = 39,4$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι ο $39,4^\circ\text{C}$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t) = 25 + 48e^{-0,3t}$ όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει $T(40) = 39,4$, οπότε αν $T(t_0) = 40$, τότε $T(t) > T(40)$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_0 < 40$. Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους 40 και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

21680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

Λύση

$$\alpha) f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8) \Leftrightarrow \ln 2 + 3\ln 4 = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 8 \Leftrightarrow \ln 2 + 3\ln 2^2 = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 + 6\ln 2 = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \ln 2 \Leftrightarrow 7\ln 2 = 7\ln 2 \text{ ισχύει.}$$

β) Για κάθε $x < 1$ είναι $x - 1 < 0$, $\ln x < 0$ άρα $f(x) = (x-1)\ln x > 0$.

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $x - 1 \geq 0$, $\ln x \geq 0$ άρα $f(x) = (x-1)\ln x \geq 0$.

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq 0$, η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) i. Οι τετμημένες των κοινών τους σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 2x - 2$.

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(\ln x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ ή}$$

$$(\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2).$$

Για $x = 1$ είναι $y = 0$ και για $x = e^2$ είναι $y = 2e^2 - 2$, οπότε κοινά σημεία της C_f με την ε είναι τα $(1, 1)$ και $(x = e^2, 2e^2 - 2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία όταν $f(x) < 2x - 2 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(\ln x - 2) < 0$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα από όπου προκύπτει ότι $x \in (1, e^2)$.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$x-1$	—	0	+	+
$\ln x - 2$	—	—	0	+
Γινόμενο	+	—	+	+

21950. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

Λύση

$$\alpha) \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow (\omega^3 - 8)(\omega^2 + 4\omega - 12) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega - 2)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 2)^2(\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty).$$

ω	$-\infty$	-6	2	$+\infty$
$(\omega - 2)^2$	+	+	$\neq$	+
$\omega^2 + 2\omega + 4$	+	+		+
$\omega - 6$	-	o	+	+
Γινόμενο	-	o	+	+

β) Η f ορίζεται όταν $\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0$ και αν θέσουμε

$$e^x = \omega > 0 \text{ γίνεται } \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow (-6 < \omega < 2 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2) \text{ ή } (\omega > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2).$$

Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Για $x \neq \ln 2$ είναι: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} - 8 = e^{2x} + 4e^x - 12 \Leftrightarrow$

$$e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) - 4(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x - 1)(e^x - 2)(e^x + 2) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ δεκτή}) \text{ ή }$$

$$(e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2 \text{ αδύνατη}).$$

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το $(0, 0)$.

25463. Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της g παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = \alpha \sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και}$$

ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία

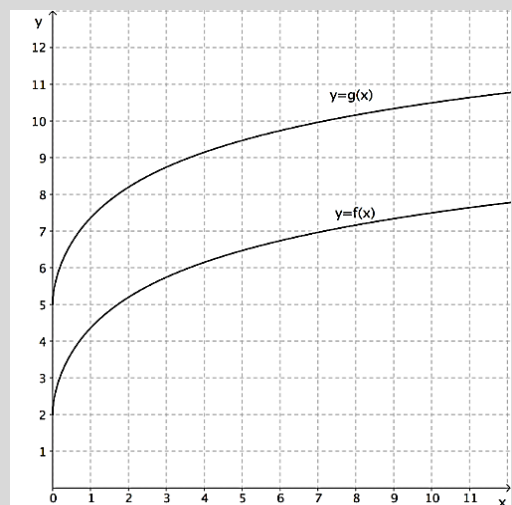
$$A(0, 2) \text{ και } B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4) \text{ ενώ για την γραφική παράσταση της } g, \text{ γνωρίζουμε ότι}$$

προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.



Λύση

α) Επειδή η C_f διέρχεται από το A , ισχύει ότι: $f(0) = 2 \Leftrightarrow \alpha \sqrt{\ln 1} + \ln 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2$

Επειδή η C_f διέρχεται από το B, ισχύει ότι: $f(e^2 - 1) = 2\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\ln e^2} + \ln e^2 + 2 = 2\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2} + 2 + 2 = 2\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Είναι $f(x) = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 2, x \geq 0$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω, είναι $g(x) = f(x) + 3 = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 5, x \geq 0$.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο (5, 9.5) περίπου ανήκει στη C_g , άρα η ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά είναι περίπου τα 9,5 χρόνια.

Για $x \geq 0$ είναι: $g(x) = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + 5 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} = -\ln(x+1)$ (1).

Επειδή $2\sqrt{\ln(x+1)} \geq 0$ και $-\ln(x+1) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, η (1) γίνεται:

$$\left(2\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2 = \left(-\ln(x+1)\right)^2 \Leftrightarrow 4\ln(x+1) = \ln^2(x+1) \Leftrightarrow 4\ln(x+1) - \ln^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1)(4 - \ln(x+1)) = 0 \Leftrightarrow (\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή}$$

$$(4 - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 4 \Leftrightarrow x+1 = 10^4 = 10.000 \Leftrightarrow x = 9.999).$$

21674. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}, x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $10^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow x > \log 2$, άρα $A = (\log 2, +\infty)$.

β) i. Για κάθε $x \in (\log 2, +\infty)$ είναι: $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2} \Leftrightarrow \frac{10^x}{3} = 10^x - 2 \Leftrightarrow 2 = 10^x - \frac{10^x}{3} \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot 10^x - 10^x \Leftrightarrow 2 \cdot 10^x = 6 \Leftrightarrow 10^x = 3 \Leftrightarrow x = \log 3$ δεκτή.

ii. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g είναι οι

λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log \sqrt{10^x - 2} = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ και από το

προηγούμενο σκέλος είναι $x = \log 3$. Είναι $f(\log 3) = \log \sqrt{10^{\log 3} - 2} = \log \sqrt{3 - 2} = \log 1 = 0$, οπότε κοινό σημείο το $(\log 3, 0)$.

37476. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) $1 < \log 20 < 2$.

δ) $P(\log 20) < 0$.

Λύση

α) Είναι $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-2)$, άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι $(x+1)(x-2)$.

β) $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) $1 < \log 20 < 2 \Leftrightarrow \log 10 < \log 20 < \log 10^2 \Leftrightarrow 10 < 20 < 100$ ισχύει.

δ) Επειδή $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$ και $\log 20 \in (1, 2)$, είναι $P(\log 20) < 0$.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Θέμα 3ο

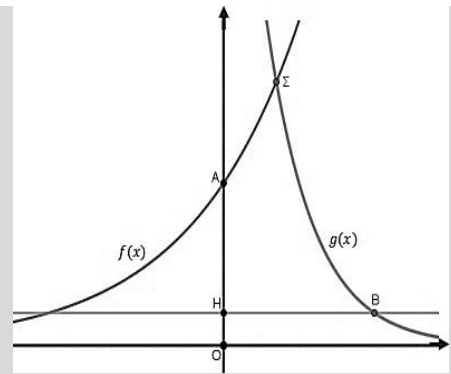
15392. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$.



Λύση

α) Είναι $f(0) = 2^0 = 1$, άρα $A(0, 1)$.

Είναι $g(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x} = 5^{-1} \Leftrightarrow 1-x = -1 \Leftrightarrow 2 = x$, άρα $B\left(2, \frac{1}{5}\right)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 5^x = 5 \Leftrightarrow 10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log 5$, άρα $x_\Sigma = \log 5$.

γ) $x_B - x_\Sigma = 2 - \log 5 = \log 10^2 - \log 5 = \log \frac{100}{5} = \log 20$

15676. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ για τις τιμές του $x > 0$ για τις οποίες είναι

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$.